Apuntes de Hidráulica



Hidráulica e Hidrología

E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos

Jaime García Palacios

2022

El autor agradece especialmente la colaboración de Cristian Ponce Farfán en la realización de algunos figuras y redacción de problemas de esta obra.

Otros autores que también han contribuido son:

- Cristian Ponce Farfán
- Luis Garrote de Marcos
- Luis Mediero Orduña
- Francisco Laguna Peñuelas
- Antonio Lastra de la Rubia
- Isabel Granados García
- Eduardo Martínez Marín
- Eduardo Martínez Olmos

El autor agradece las sugerencias, correcciones y contribuciones que puedan mejorar el siguiente contenido:

jaime.garcia.palacios@upm.es



Hidráulica e Hidrología: Hidráulica e Hidrología se encuentra bajo una licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International

Contents

1 Propiedades de los fluidos **5**

1.1 Introducción 5

1.2 Masa y densidad 5

1.3 Peso específico 6

1.4 Compresibilidad. Módulo de elasticidad volumétrico 7

1.5 Presión de vapor 8

1.6 Dilatación térmica 9

1.7 Tensión superficial 10

Ejercicio 1 12

1.8 Viscosidad 13

1.8.1 Movimiento laminar o turbulento 15

Ejercicio 2 16

2 Hidrostática **17**

2.1 Introducción 17

2.2 Presión 17

2.3 Ecuación General de la Hidrostática 19

2.3.1 Casos particulares 20

Ausencia de fuerzas exteriores 20

Las fuerzas se derivan de un potencial ψ 21

El campo gravitatorio 22

Líquidos incompresibles en el campo gravitatorio 22
Gases en el campo gravitatorio 23
Ejemplo: Actuación conjunta de dos campos equipotenciales 23
Ejemplo: Presión en la base de un cilindro girando 24
2.4 Presiones absolutas y relativas 25
2.5 Empujes sobre superficies planas 27
2.5.1 Obtención de la resultante del empuje sobre superficies planas 29
Ejercicio 3 30
Ejercicio 4 30
2.6 Empuje sobre superficies curvas 31
2.6.1 Método de Poincaré 32
2.7 Flotación 33
2.7.1 Equilibrio del sólido sumergido. Empuje de Arquímedes 34
Empujes horizontales sobre un sólido sumergido 34
Empujes verticales sobre un sólido sumergido 35
2.7.2 Tensión efectiva 36
2.7.3 Subpresión 38
Ejemplo: Subpresión bajo una presa de gravedad. 39
Ejemplo: Fuerza necesaria para quitar un tapón. 40
2.7.4 Equilibrio del sólido semisumergido 42
Primer Teorema de Euler 43
Flotación estable de un cuerpo semisumergido 44
Segundo Teorema de Euler 44
Brazo estabilizador 45
Ejemplo: Flotación de una barcaza 46
Indicatriz de Dupín 47
Ejercicio 5 47
2.7.5 Equilibrio del sólido semisumergido con lastre líquido en su interior 47

Ejemplo: Flotación de una barcaza con lastre líquido interior 48

Ejemplo: Flotación de una barcaza con lastre líquido interior y separación con mamparas 50

3 Hidrodinámica **51**

3.1 Introducción 51

3.2 Clasificación de la mecánica de fluidos 52

3.2.1 Respecto del método de cálculo 52

3.2.2 Respecto de la forma de cálculo 52

Coordenadas Eulerianas 52

Coordenadas Lagrangianas 52

Definiciones 53

3.2.3 Respecto del tipo de movimiento 53

Definiciones 54

3.2.4 Propiedades de las líneas de corriente 54

3.3 Aceleración 55

3.4 Caudal 56

3.5 Ecuación de conservación de la cantidad de masa 57

3.5.1 Casos particulares de la ecuación de conservación de la masa 58

Movimiento permanente 58

Fluido incompresible 58

Fluido incompresible y tubo indeformable 58

Movimiento permanente del fluido incompresible y tubería indeformable 58

3.6 Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento 59

3.6.1 Comentarios sobre la ecuación de cantidad de movimiento 60

3.7 Ecuación de conservación de la energía 61

3.7.1 Comentarios al Trinomio de Bernoulli 64

3.7.2 Líneas de energía y piezométrica 65

4 Conducciones en presión **67**

4.1 Pérdidas de carga . . . 67

4.1.1 Pérdida de carga continua . . . 68

4.1.2 Determinación de la pendiente de pérdidas . . . 69

Movimiento laminar . . . 69

Movimiento turbulento . . . 70

4.1.3 Comentarios . . . 73

4.2 Pérdida de carga localizada . . . 74

4.3 Ensanchamientos . . . 76

4.3.1 Ensanchamiento brusco. Ecuación de Borda-Carnot . . . 76

4.3.2 Entrada en un depósito . . . 77

4.4 Pérdida de carga en estrechamientos . . . 78

4.4.1 Estrechamiento brusco . . . 78

4.4.2 Estrechamiento gradual . . . 79

4.4.3 Salida de un depósito . . . 79

4.4.4 Salida de un depósito abocinada con radio de curvatura dado . . . 79

4.5 Perdida de carga localizada en válvulas . . . 80

4.5.1 Válvulas de compuerta . . . 80

4.5.2 Válvulas de mariposa . . . 80

4.5.3 Válvulas de esfera . . . 81

4.6 Pérdidas de carga localizadas en codos . . . 81

4.6.1 Codos segmentados . . . 81

4.6.2 Codos circulares . . . 82

4.7 Cavitación . . . 82

Ejemplo: Caudal circulante entre dos depósitos . . . 82

Ejemplo: Comparación de la medición con venturi y Pitot . . . 88

4.8 Bombas . . . 90

4.9 Clasificación de bombas . . . 90

4.9.1 Curvas característica y resistente . . . 91
4.9.2 Elección de la bomba . . . 95
4.9.3 Punto de funcionamiento . . . 96
4.9.4 Bombas en serie y paralelo . . . 98
4.9.5 Cavitación en bombas y turbinas . . . 99
Número de cavitación . . . 100
NPSH . . . 100
Ejemplo: Número de cavitación y NPSH en un venturi . . . 101

7 Movimiento en lámina libre 105

7.1 Introducción . . . 105
7.2 Variables y notación . . . 105
7.3 Movimiento en canales . . . 107
7.3.1 Respecto del tipo de movimiento . . . 107
7.4 Concepto de régimen aplicado al tipo de circulación . . . 108
7.5 Ecuaciones . . . 110
7.5.1 Ecuación de continuidad . . . 111
7.5.2 Ecuación de la energía . . . 111
7.5.3 Ecuación de la dinámica en canales . . . 112
7.6 Ecuación de la variación de la cantidad de movimiento . . . 113
7.7 Régimen uniforme . . . 114
7.8 Régimen crítico . . . 115
7.9 Energía específica . . . 116
7.10 Curvas de remanso . . . 117
7.11 Resalto hidráulico . . . 121
7.11.1 Pérdida de energía en el resalto . . . 124
7.12 Transiciones locales . . . 125
7.12.1 Curva de energía específica . . . 127

Sobreelevación en solera 127
Escalón ascendente 129
Escalón descendente 133
Cambios de ancho en canal 138
7.12.2 Tomas de embalses 147
Ejemplo: Caudal de salida de una toma 147
7.13 Compuertas y vertederos 148
7.13.1 Clasificación de los vertederos 150
7.13.2 Ecuaciones de los distintos tipos de vertederos 151
7.13.3 Desagüe bajo compuerta 152

8 Modelos reducidos **155**

8.1 Introducción 155
8.2 Análisis dimensional 156
8.2.1 Introducción 156
8.2.2 Definiciones 156
8.2.3 Teorema de Buckingham-Pi 157
8.2.4 Aplicación práctica del teorema 158
8.2.5 Expresión de las magnitudes físicas en los sistemas $\{[M][L][T][\theta]\}$ ó $\{[F][L][T][\theta]\}$ 159
Ejemplo: Análisis dimensional de un péndulo 160
Ejemplo: Análisis dimensional en una bomba 163
8.3 Ecuación general de la hidráulica 165
8.3.1 Interpretación de los monomios adimensionales 168
8.3.2 Número de Froude 169
8.3.3 Número de Reynolds 170
8.3.4 Número de Weber 170
8.3.5 Número de Cauchy. Número de Match 170
8.3.6 Número de Euler 171

8.3.7 Expresión reducida de la Ecuación General de la Hidráulica 171
8.3.8 Importancia de los monomios adimensionales en distintos problemas 172
8.4 Semejanza hidráulica 172
8.4.1 Introducción 172
8.4.2 Tipos de semejanza 173
8.4.3 Semejanza de Froude 175
Ejemplo: Semejanza de Froude 176
8.4.4 Semejanza de Reynolds 177
Ejemplo: Semejanza de Reynolds 178
Ejemplo: Semejanza de Froude y Reynolds 179
8.4.5 Relaciones de escala en problemas de semejanza 179

9 El medio poroso **181**

9.1 Introducción 181
9.2 El medio poroso 181
9.3 Ley de Darcy 184
9.4 Generalización de la Ley de Darcy 188
9.5 Permeabilidades equivalentes 188
9.5.1 Flujo en terrenos dispuestos en paralelo 188
9.5.2 Flujo en terrenos dispuestos en serie 189
9.5.3 Analogía eléctrica 190
9.6 Ecuación de continuidad 191
9.7 La función de corriente 193
9.8 Movimiento irrotacional 194
9.9 Potencial de velocidades 194
9.10 Ecuación de Laplace 195
9.11 Red de flujo 196
9.12 Condiciones de contorno 196

9.13 Resolución de la Ecuación de Laplace 197
9.14 Hipótesis de Dupuit 198
Ejemplo: Caudal extraído de una zanja 198
9.15 Acuífero confinado 200
Ejemplo: Cálculo de la permeabilidad en un acuífero confinado. 201
9.16 Acuífero con superficie libre 202
Ejemplo: Cálculo de la permeabilidad en un acuífero libre. 203

10 Golpe de Ariete **205**

10.1 Introducción 205
Soluciones a los Ejercicios 208

Propiedades de los fluidos

1

1.1 Introducción

En este tema se introducen las propiedades físicas de los fenómenos influyentes en la hidráulica.

Se priorizan las referencias al agua, por ser este el elemento principal de la asignatura. Sin embargo, éste debe considerarse como un caso particular de líquido, que a su vez, es un subconjunto de los fluidos formados tanto por líquidos como por gases.

Asimismo se adjuntan una serie de vínculos a videos que permiten observar algunos de los fenómenos descritos. Estos se consideran muy ilustrativos por lo que se recomienda su visualización.

1.2 Masa y densidad

Definimos la **masa (m)** como una medida de la cantidad de materia que posee un cuerpo. Esta suele expresarse a través de la **densidad (ρ)**, que expresa la masa por unidad de volumen (V) de ese cuerpo. Es decir:

$$\rho = \frac{M}{V} \tag{1.1}$$

La unidad de masa en el sistema internacional (SI) es el kg, y de volumen el m^3, resultando por tanto la densidad en kg/m^3.

El valor de la densidad para el agua es de $\rho = 1000\ kg/m^3$.

Este valor sufre pequeños cambios con la presión y temperatura pero puede considerarse despreciable para muchos de los problemas que planteamos en la hidráulica. Sí debe tenerse en cuenta su variación en el caso de encontrarse materia en disolución en su interior. Por ejemplo, el agua del mar, donde este valor puede llegar a $\rho = 1030\,kg/m^3$, lo que influye en los problemas de flotación.

Recuperando la definición de la densidad dada en la ecuación (1.1), y despejando la masa:

$$M = \rho V \tag{1.2}$$

Diferenciando:

$$dM = \rho dV + V d\rho \tag{1.3}$$

Dividiendo por la masa:

$$\frac{dM}{M} = \frac{\rho dV}{\rho V} + \frac{V d\rho}{V \rho} \qquad \rightarrow \qquad \frac{dM}{M} = \frac{dV}{V} + \frac{d\rho}{\rho} \tag{1.4}$$

Teniendo en cuenta la **conservación de la masa** $\left(\frac{dM}{M} = 0\right)$, se cumple que la variación relativa de volumen coincide con la variación relativa de densidad. El signo contrario indica que un aumento de volumen se corresponde con una disminución de la densidad.

$$\frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho} \tag{1.5}$$

Se define **densidad relativa (ρ')** de un cuerpo como la densidad de dicho cuerpo (ρ_s) respecto de la del agua (ρ). Esta magnitud es adimensional:

$$\rho' = \frac{\rho_s}{\rho} \tag{1.6}$$

El comportamiento normal en fluidos es que a menor temperatura mayor densidad. Sin embargo, un comportamiento anómalo que tiene el agua es que la densidad máxima se produce para una temperatura cercana a los $4°C$. Este fenómeno es muy importante en la naturaleza ya que permite que el hielo flote sobre el agua. De esta forma los ríos helados siguen fluyendo por debajo de la capa superior de hielo. Los físicos utilizan la temperatura de $4°C$ para definir las propiedades del agua, mientras que en ingeniería suele utilizarse los $15°C$, valor más cercano a la temperatura media a la que se suele encontrar el agua.

1.3 Peso específico

El **peso específico (γ)** se define como la fuerza con que es atraída la masa por unidad de volumen por la gravedad (g):

$$\gamma = \rho g \tag{1.7}$$

Por tanto sus unidades serán $\frac{kg}{m^3}\frac{m}{s^2} = \frac{N}{m^3}$. Si consideramos el valor de la gravedad terrestre $g = 9.81$ m/s^2, el valor para el agua del peso específico es $\gamma = 9810$ N/m^3

Igualmente, se define el peso específico relativo de un cuerpo (γ') respecto del agua como:

$$\gamma' = \frac{\gamma_s}{\gamma} = \frac{\rho_s}{\rho} = \rho' \tag{1.8}$$

siendo γ_s el peso específico del cuerpo considerado.

Nota

Es importante tener en cuenta la dependencia de γ de la gravedad. Ello implica que en la luna, como la cantidad de masa es la misma, la densidad no varía con respecto a la de la tierra (despreciando los cambios de volumen debidos a la variación de presión y temperatura), pero sí lo hace el peso específico

1.4 Compresibilidad. Módulo de elasticidad volumétrico

El **módulo de elasticidad volumétrico (E_a)** expresa la relación existente entre el incremento de presión (ΔP) aplicado a un volumen sólido y su reducción relativa de volumen (ΔV_r):

$$E_a = -\frac{\Delta P}{\Delta V_r} \tag{1.9}$$

Si expresamos el incremento de presión como la variación de la fuerza (F) aplicada por unidad de area (A) y el incremento relativo de volumen lo referimos al volumen inicial (V), se tiene:

$$E_a = -\frac{\frac{\Delta F}{A}}{\frac{\Delta V}{V}} = -\frac{\Delta F\, V}{\Delta V\, A} \tag{1.10}$$

siendo ΔV la variación total de volumen. El signo menos se utiliza para mantener positivo el valor de E_a cuando consideramos positivo el valor de la fuerza de compresión y negativa la reducción de volumen.

A nivel diferencial, se tiene:

$$E_a = -dP\frac{V}{dV} \tag{1.11}$$

Observamos que este concepto está directamente asociado con la presión aplicada sobre el volumen, es decir, con la compresibilidad del mismo.

A diferencia del módulo de Young, el módulo de elasticidad volumétrico puede aplicarse a fluidos, tanto líquidos como gases.

Su valor en el agua es de 2200 MPa. Referido a otros materiales, se puede decir que:

$$E_a \approx \frac{E_{acero}}{100} \approx \frac{E_{hormigon}}{10} \tag{1.12}$$

Esto implica que en muchos problemas el agua sea considerado como un fluido incompresible. Sin embargo, hay que tener en cuenta que en otros problemas no puede realizarse esta simplificación, como es el caso del golpe de ariete.

Sustituyendo la ecuación (1.5) en (1.11), se tiene:

$$E_a = dP\frac{\rho}{d\rho} \tag{1.13}$$

Por tanto, conocida la presión en dos puntos 1 y 2 del fluido y su módulo de elasticidad volumétrico, se puede determinar la variación de densidad mediante:

$$\int_{P_1}^{P_2} dP = \int_{\rho_1}^{\rho_2} E_a \frac{d\rho}{\rho} \qquad \rightarrow \qquad P_2 - P_1 = E_a \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{1.14}$$

Esta expresión será únicamente válida cuando pueda considerarse $E_a = cte$.

1.5 Presión de vapor

Eu una superficie libre existe un intercambio continuo de moléculas entre el líquido y el gas. Se denomina **presión de saturación** a la presión de equilibrio entre el líquido y el gas con el que se relaciona en su superficie libre.

Al aumentar la temperatura (T), aumenta la actividad molecular. Si se reduce la presión en la superficie del líquido por debajo de la presión de saturación, éste intercambia moléculas hacia el vapor (las moléculas en estado líquido pasan a estado gaseoso). Este fenómeno puede producirse bien por:

- **Ebullición:** Aumento de la temperatura.
- **Cavitación:** Por disminución de la presión.

Existe una presión llamada **presión de vapor** por debajo de la cual se produce la cavitación.

El valor de esta presión en el agua a $20°C$ es:

$$P_{cv} = 2,34\, KPa \tag{1.15}$$

La presión de saturación en el agua hirviendo ($100°C$) equivale a:

$$P_{atm} = 101,33\, KPa \tag{1.16}$$

La tabla 1.1 refleja algunos valores de la presión de vapor en funcíon de la temperatura a la presión de una atmósfera:

T ()	Pv (kPa)	T ()	Pv (kPa)
0	0,611	50	12,35
4	0,814	60	19,95
10	1,228	70	31,20
20	2,339	80	47,41
30	4,247	90	70,18
40	7,385	100	101,33

Tabla 1.1: Presión de vapor de agua en función de la temperatura a la presión de 1 atm

El fenómeno de la cavitación en un conducto es altamente perjudicial porque se forman burbujas de aire que rompen la continuidad del fluido produciendo:



- **Pulsación:** Vibración debida a la vaporización y condensación de las moléculas de agua-aire. Ello introduce un esfuerzo mecánico que puede dañar la conducción.
- **Corrosión:** Se libera oxígeno, lo que afecta a la corrosión de las tuberías metálicas.
- **Pérdida de sección efectiva:** Al haber aire hay una menor circulación de agua (caudal), lo que afecta a la pérdida de rendimiento de las maquinas hidráulicas.

Este fenómeno puede producirse a temperatura ambiente, como puede verse en la foto adjunta, debido a un estrangulamiento en una sección de tubería.

Por ejemplo, el mercurio tiene una presión de vapor de $P_{v_{Hg}} = 0.17\ Pa$ lo que lo hace muy adecuado para su utilización en barómetros. Eso implica que la parte superior del tubo invertido del mercurio se encuentra con ese valor de la presión ($P_{v_{Hg}}$), que podemos considerar casi despreciable frente a la presión atmosférica.

1.6 Dilatación térmica

La **dilatación térmica** expresa la variación en la unidad de volumen cuando se le somete a una variación de temperatura. Se define a través del coeficiente de dilatación térmica (α) como:

$$\alpha = \frac{\frac{\Delta V}{V}}{\Delta T} = \frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta T} = -\frac{\frac{\Delta \rho}{\rho}}{\Delta T} \tag{1.17}$$

Obsérvese que puede expresarse como la variación relativa de densidad al variar la temperatura.

Este coeficiente tiene dimensiones de $\frac{1}{^\circ K}$ y su valor en el agua es:

$$\alpha = 2.1 \cdot 10^{-4}\ {}^\circ K^{-1} \tag{1.18}$$

Debe tenerse en cuenta que en la variación de la densidad influyen presión y temperatura, ya que:

$$d\rho = \left.\frac{\partial \rho}{\partial T}\right|_{P=cte} dT + \left.\frac{\partial \rho}{\partial P}\right|_{T=cte} dP \tag{1.19}$$

a $P = cte$ se tiene:

$$\alpha = -\frac{1}{\rho}\left.\frac{\partial \rho}{\partial T}\right|_{P=cte} \tag{1.20}$$

En un gas ideal, donde $\rho = \frac{P}{RT}$ se llega a:

$$\alpha = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{P}{RT}\right) = \frac{1}{T} \tag{1.21}$$

La dilatación térmica es la responsable de la estratificación de los fluidos

1.7 Tensión superficial

Se denomina **tensión superficial** de un líquido a la energía necesaria para aumentar su superficie una unidad de area.

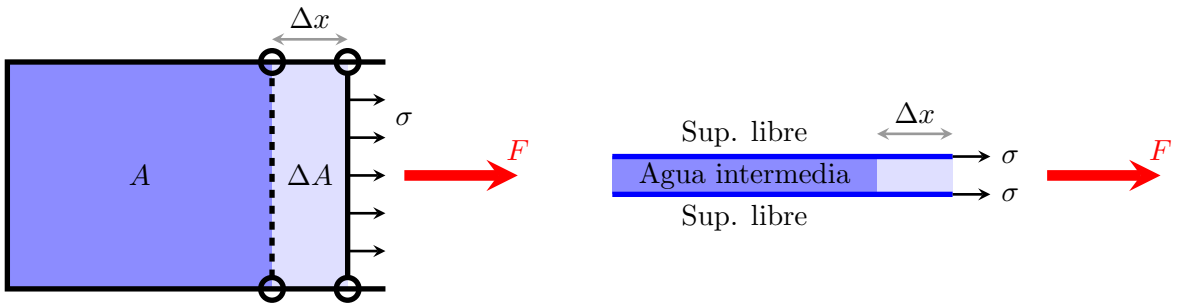


Figura 1.1: Medida de la tensión superficial

Para medirla supongamos el dispositivo de la figura 1.1 en el que en el área A tenemos un líquido cuyo contorno esta rodeado por alambres. El alambre de la derecha puede moverse en la dirección de la fuerza aplicada. Por ejemplo, cuando aplicamos una fuerza F, se produce un desplazamiento Δx.

Nota

En este dispositivo existen dos superficies libres. Si atravesamos el área A en una dirección perpendicular a la misma, primero atravesaremos la primera superficie, pasando a la zona intermedia donde se encuentra el fluido, y luego saldremos del interior nuevamente al exterior atravesando la segunda superficie libre. Lo mismo ocurre en las pompas de jabón con aire en el interior. La membrana de la pompa está formada por 2 superficies libres

El trabajo (τ) realizado para aumentar la superficie en ΔA viene dado por:

$$\tau = \frac{1}{2} F \Delta x \tag{1.22}$$

donde el $1/2$ viene dado porque estamos considerando 2 superficies, una superior y otra inferior.

Utilizando la definición dada para la tensión superficial, se tiene:

$$\sigma = \frac{\tau}{\Delta A} = \frac{F\Delta x}{2\Delta A} = \frac{F}{2L} \tag{1.23}$$

Físicamente se podría haber interpretado σ como una tensión aplicado a lo largo de la longitud L equivalente a la fuerza $F/2$ aplicada a cada una de las superficies.

$$\sigma = \frac{F}{2L} \tag{1.24}$$

Las unidades serán por tanto de fuerza partido por distancia (N/m)

El valor de la tensión superficial en el agua a $15°C$ es:

$$\sigma = 0,0735\, N/m \tag{1.25}$$

La interpretación física de este fenómeno es que una partícula de líquido que se encuentra sumergida en el interior del mismo se encuentra atraída igualmente por todas las partículas que le rodean. Sin embargo, una partícula de la superficie libre se encuentra en equilibrio en la dirección horizontal, pero no así en la vertical, donde la partícula de gas que esta por encima atrae menos a la partícula líquida situada en la superficie que la del líquido que esta debajo. Esto hace que todas las partículas de la superficie se vean atraídas hacia abajo.

En el vínculo siguiente puede verse un vídeo ilustrativo de este fenómeno, así como de la actuación de la presión atmosférica:



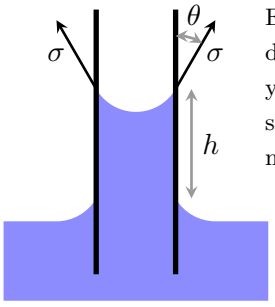
Surface tension

En los bordes del recipiente que contiene un fluido, si la densidad del fluido es menor que la del recipiente, como ocurre por ejemplo entre el agua y el vidrio, el vidrio atrae con mas fuerza a la partícula de agua que el gas atmosférico, haciendo que en los contornos del recipiente, la superficie libre se curve hacia arriba. Este fenómeno denominado **ascensión capilar** tiene gran importancia en la naturaleza porque es lo que permite que el agua ascienda por los capilares de las plantas y árboles llevando el agua y otras sustancias hasta las hojas.

En el caso de que el líquido posea una mayor densidad que el recipiente que lo contiene, como es el caso del mercurio contenido en un recipiente de vidrio, la masa de mercurio interior ejerce una mayor atracción que las paredes de vidrio. Ello provoca que la curvatura en el contorno del recipiente sea hacia abajo. Se produce lo que se denomina **descenso capilar**.

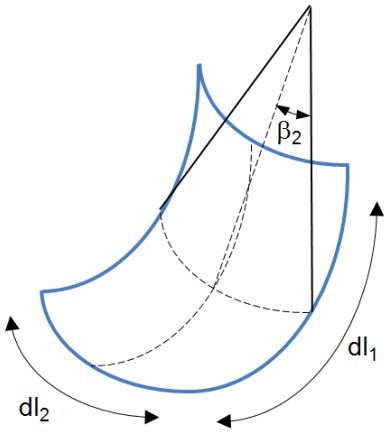
La ascensión capilar puede estudiarse mediante la **Ley de Jurín** que plantea el equilibrio de fuerzas verticales debidas a la componente vertical de la tensión superficial actuando en el contacto del líquido y el recipiente que lo contiene, y el peso de fluido elevado.

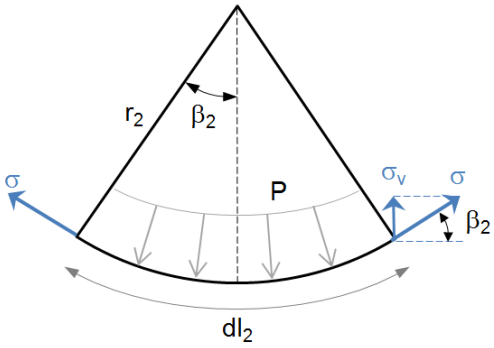
$$2\pi R\sigma \cos\theta = \gamma\pi R^2 h \qquad \rightarrow \qquad h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\gamma R} \tag{1.26}$$



En recipientes de paredes lisas y limpias puede suponerse $\theta = 0$ si no hay mas datos

La **fórmula de Laplace** aplicada a la tensión superficial establece una relación entre la tensión superficial y la presión aplicada sobre una superficie líquida diferencial.





$$\Delta P\, dl_1\, dl_2 = 2\sigma\,(dl_2 \text{ sen } \beta_1 + dl_1 \text{ sen } \beta_2) \qquad \rightarrow \qquad \Delta P = \frac{\sigma\,(r_1 + r_2)}{r_1 r_2} = \sigma\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \qquad (1.27)$$

siendo:

$$dl_1 = 2\beta_1 r_1\,; \qquad \text{sen } \beta_1 \simeq \beta_1$$
$$dl_2 = 2\beta_2 r_2\,; \qquad \text{sen } \beta_2 \simeq \beta_2$$

En la siguiente dirección web puede verse como un clip se mantiene flotando en agua debido a la tensión superficial. Hay que tener en cuenta que la densidad del clip es mayor que la del agua. De hecho si lo sumergimos en el líquido en vez de colocarlo con cuidado en la superficie, el clip se hundirá.

http://www.fotolog.com/quimifobia/12326766

Otro ejemplo es la capacidad del zapatero para andar sobre el agua:

Imagen del zapatero

Si el fluido tiene una elevada tensión superficial podríamos llegar a caminar sobre él como muestra este vídeo de El Hormiguero.

Corriendo sobre un fluido

Ejercicio 1

Test.

1. Calcular la presión atmosférica en Pascales (con 2 decimales) de un barómetro de mercurio que registra una altura de $h_{Hg} = 760\ mm$. Considere la densidad del mercurio $13.6 \cdot 10^3\ kg/m^3$ y un valor de la gravedad de $9.81\ m/s^2$ Ans Pa

2. Calcular la presión atmosférica en Pa de la pregunta anterior cuando se considera que la presión de cavitación del mercurio es $P_{v_{Hg}} = 0.17\ Pa$ Ans Pa

3. Determine el error relativo, con al menos 3 cifras significativas, entre ambas medidas como: $\frac{|P_1-P_2|}{\frac{P_1+P_2}{2}}$ Ans –

4. Determine el descenso capilar del mercurio teniendo en cuenta que el ángulo con la pared es $\theta = 140°$, el tubo es de 3 mm de diámetro y la tensión superficial del mercurio a $20°C$ es $\sigma_{Hg} = 0.375\ N/m$. Ans m

5. Determine el nuevo error en la medida de la presión debido al descenso capilar: Ans –

Pulsar sobre la palabra ejercicio 1 al comienzo para ver la solución

1.8 Viscosidad

Los fluidos, a excepción del ideal, presentan una cierta resistencia a la deformación como consecuencia de las acciones intermoleculares que se establecen entre sus partículas. Esta resistencia depende de la velocidad de deformación relativa entre dos líneas de corriente adyacentes dv separadas una distancia dy.

El conocimiento preciso de este comportamiento es fundamental a la hora de estudiar algunos de los fenómenos asociados al movimiento del agua, como la separación entre el régimen laminar y turbulento.

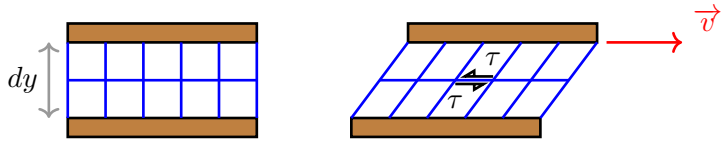


Figura 1.2: Deformación de una partícula de agua debido a las tensiones tangenciales

Se denomina **fluido newtoniano** al fluido que tiene una relación lineal entre la velocidad de deformación y la tensión tangencial dada por:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \tag{1.28}$$

siendo:

τ	Tensión tangencial o de corte entre las partículas	(N/m^2)
μ	Viscosidad dinámica del fluido	$(N \cdot s/m^2 \text{ó} Pa \cdot s)$
du	Diferencial de velocidad entre líneas de corriente adyacentes	(m/s)
dy	Diferencial de distancia entre líneas de corriente adyacentes	(m)

También suele utilizarse el valor de la viscosidad cinemática definida como:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{\mu \cdot g}{\gamma} \tag{1.29}$$

siendo:

ν	Viscosidad cinemática del fluido	(m^2/s)
ρ	Densidad del fluido	(kg/m^3)

Los valores en el agua son $\mu = 10^{-3}\ Pa \cdot s$ para la viscosidad dinámica y $\nu = 10^{-6}\ m^2/s$ para la viscosidad cinemática.

Un **fluido ideal** es aquel que no tiene interacción entre las partículas cuando hay movimiento. Se corresponde con el eje horizontal de la figura 1.3. El vídeo siguiente extraído del documental de la BBC *'Absolute Zero'*, muestra el comportamiento de uno de estos fluidos:

Superfluid helium

El **sólido rígido** tiene deformación por la actuación de una fuerza, aunque no haya velocidad de deformación, por lo que representa el eje vertical de la figura 1.3.

Otros tipos de comportamiento pueden verse en la misma figura 1.3.

Nota

En un sólido rígido elástico la deformación se produce mientras se mantiene la fuerza actuante. En el caso de un fluido, para existir la fuerza tangencial debe haber diferencia de velocidad relativa entre las partículas adyacentes. No basta solo con que haya movimiento

El término reología ($\rho\varepsilon o\sigma$) (rheos=corriente) fue establecido por Bingham en 1929 para expresar el comportamiento entre las velocidades de deformación y las tensiones tangenciales. La figura 1.3 muestra el comportamiento de distintos fluidos en un diagrama reológico.

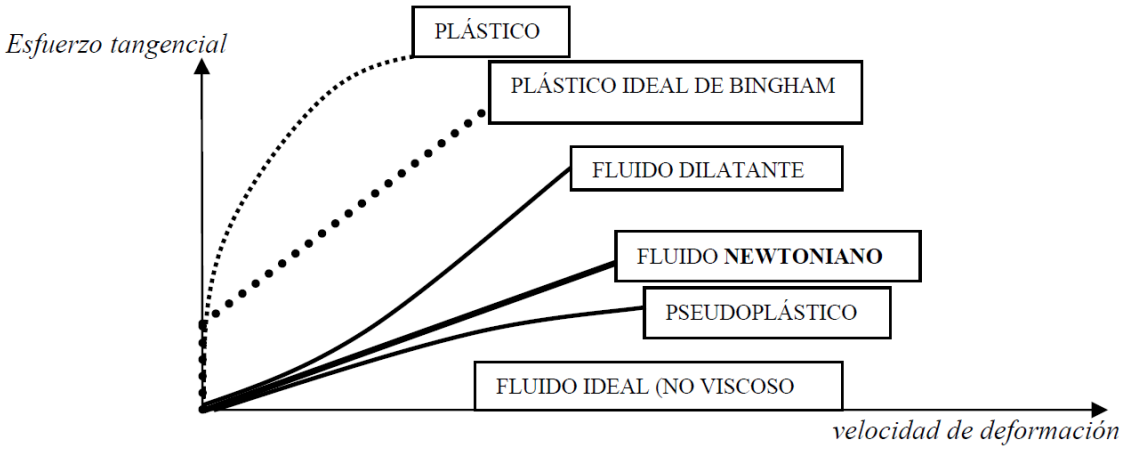


Figura 1.3: Diagrama reológico del comportamiento de los fluidos

En el comportamiento **plástico**, para valores pequeños de la fuerza tangencial, el fluido se comporta

como un sólido rígido, es decir se deforma manteniendo la misma posición relativa con las partículas adyacentes y es capaz de volver a su situación inicial una vez que la carga tangencial deja de existir. Para valores mayores de τ se rompen parte de los vínculos con las partículas adyacentes y tras la descarga estos vínculos no se recuperan.

El comportamiento **pseudoplástico** es aquel en el que ha medida que aumenta la tensión tangencial las fuerzas entre líneas de corriente adyacentes disminuye, haciéndose cada vez los vínculos mas débiles. El comportamiento contrario es el de **fluido dilatante**.

Estos modelos de comportamiento no lineal pueden expresarse como

$$\tau = K \left(\frac{dv}{dy} \right)^n \tag{1.30}$$

donde $n > 1$ en fluidos dilatantes, es decir, que espesan con el esfuerzo, y $n < 1$ en fluidos pseudoplásticos que fluyen con mayor facilidad al aplicar un esfuerzo.

En los gases la viscosidad aumenta con la temperatura. Esto tiene su explicación en la teoría cinética de los gases.

En los líquidos, la viscosidad decrece con la temperatura. Ello se explica porque las fuerzas de atracción entre las moléculas, que son responsables directas de los fenómenos viscosos, disminuyen con la temperatura.

La viscosidad aumenta ligeramente al incrementar la presión.

En función de la variación de la viscosidad con el tiempo se puede realizar la siguiente clasificación:

- **Tixotrópicos:** la viscosidad se relaja con el tiempo.
- **Reopécticos:** la viscosidad aumenta con el tiempo.

1.8.1 Movimiento laminar o turbulento

La viscosidad es la principal responsable de que un fluido pueda adoptar un comportamiento laminar o turbulento.

En un régimen laminar las partículas se mueven a lo largo de líneas de corriente cuasi paralelas entre sí. Este movimiento es suave y ordenado. Este comportamiento no suele darse en fluidos y solo se verifica para velocidades muy bajas de circulación.

El régimen turbulento es el habitual en los fluidos y las partículas se mueven de forma caótica, desordenada, donde las trayectorias forman pequeños remolinos. Esto hace que las trayectorias sean impredecibles pasado un corto umbral de tiempo.

La separación entre ambos regímenes fue definida por Reynolds mediante el **Número de Reynolds** dado por:

$$R_e = \frac{v\, D}{\nu} \tag{1.31}$$

siendo:

R_e	Número de Reynolds	$(-)$
v	Velocidad media de circulación del fluido	(m/s)
D	Diámetro de la tubería	(m)
ν	Viscosidad cinemática del fluido	(m^2/s)

La separación se da para valores aproximados de $R_e = 2300$ aunque es muy dependiente de la geometría del sistema, del ruido y de las imperfecciones que puedan existir. Valores inferiores a este umbral indican flujo laminar y superiores, turbulento.

El siguiente video, un tanto antiguo, es muy didáctico para aprender la diferencia entre un flujo laminar y turbulento, además de explicar distintos comportamientos de la velocidad en el interior de un conducto a presión:

 Characteristics of Laminar and Turbulent Flow

El experimento de Reynolds realizado en laboratorio y en español, se muestra en el video siguiente

 Experimento de Reynolds

Ejercicio 2

Entre dos superficies planas fijas separadas 2.0 cm hay un líquido de peso específico relativo 0.8. Se pide:

Test.

1. La viscosidad dinámica si la fuerza requerida para remolcar una lámina de espesor despreciable situada en el medio y área 0.4 m^2 a una velocidad de 0.2 m/s es de 0.7 N. Ans $Pa \cdot s$
2. La viscosidad cinemática. Ans m^2/s
3. Manteniendo la viscosidad, calcular la fuerza requerida para remolcar la lámina a esa misma velocidad cuando se encuentra a 0.007 m de una de las superficies. Ans N

Pulsar sobre la palabra ejercicio 2 al comienzo para ver la solución

Hidrostática

II

2.1 Introducción

La hidrostática es la parte de la mecánica que estudia los fluidos en reposo, o sin movimiento relativo entre las partículas. Por tanto, las tensiones tangenciales (τ) son nulas:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} = 0 \tag{2.1}$$

¿Quiere esto decir que el fluido no puede moverse?. La respuesta es que puede hacerlo mientras lo haga como un sólido rígido. El término (dv) se refiere a la velocidad relativa entre las partículas de fluido y no a la velocidad del movimiento como sólido rígido.

Por ejemplo, considere un cilindro dispuesto en dirección vertical, lleno de agua, que está rotando con velocidad constante sobre su propio eje. Las partículas rotan con el cilindro con velocidad angular constante, pero siempre ocupan la misma posición relativa respecto del resto.

En el caso de $\tau = 0$, el tensor de tensiones de la partícula diferencial de fluido mostrada en la figura 2.1 se escribe:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12}=0 & \tau_{13}=0 \\ \tau_{21}=0 & \sigma_{22} & \tau_{23}=0 \\ \tau_{31}=0 & \tau_{32}=0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Es decir, en la hidrostática solo existen presiones normales que denominaremos presiones.

2.2 Presión

La presión ($\mathbf{P}$) es un tensor de tensiones cuyos ejes principales son de igual magnitud (p), por lo que muchas veces suele confundirse con un valor escalar, lo que es un error.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

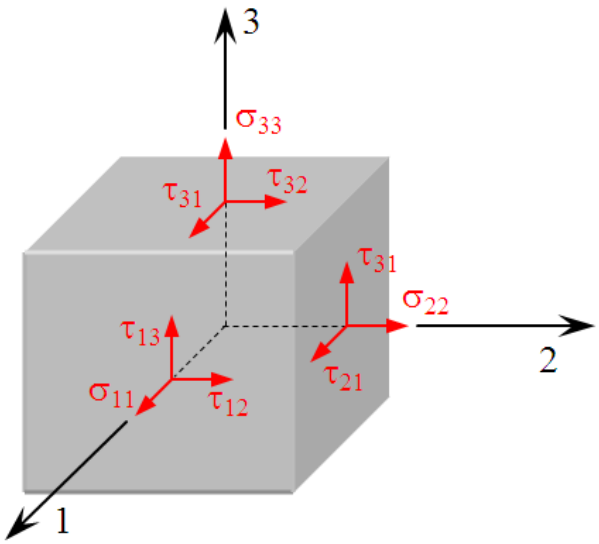


Figura 2.1: Tensor de tensiones en un elemento diferencial 3D

El valor negativo en el elemento diagonal es debido a que en la mecánica de los medios continuos se consideran positivas las tracciones (ver σ en la figura 2.1), mientras que la presión es una compresión de la partícula.

Demostración: Si estudiamos el elemento diferencial bidimensional mostrado en la figura 2.2, y tomamos como valor uniforme de la presión actuando sobre cada una de las caras las correspondientes al cdg del elemento (p), al plantear el equilibrio de fuerzas, tanto en horizontal como vertical, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} F_x &= p_x \cdot dy = F_s \cos\,\alpha = p \cdot ds \cos\,\alpha \\ F_y &= p_y \cdot dx = F_s \,\text{sen}\,\alpha = p \cdot ds \,\text{sen}\,\alpha \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

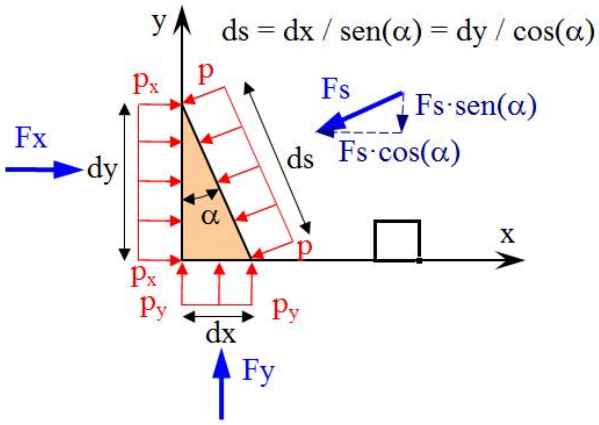


Figura 2.2: Presiones sobre un elemento diferencial en 2D

Como ds puede expresarse en función del ángulo α, como:

$$ds = dx/\ \text{sen}\ \alpha = dy/\ \cos\ \alpha \tag{2.5}$$

Sustituyendo (2.5) en (2.4), se demuestra que la presión p en todas las caras está en equilibrio:

$$\left.\begin{array}{l} p_x \cdot dy = p \cdot ds\ \cos\ \alpha = p \cdot \frac{dy}{\cos\ \alpha}\ \cos\ \alpha \\ p_y \cdot dx = p \cdot ds\ \text{sen}\ \alpha = p \cdot \frac{dx}{\text{sen}\ \alpha}\ \text{sen}\ \alpha \end{array}\right\} \rightarrow \qquad p = p_x = p_y \tag{2.6}$$

También se ha demostrado que la presión es independiente del ángulo α de actuación.

Ampliando este mismo razonamiento en el espacio tridimensional se llega a que también existe equilibrio en la dirección z.

2.3 Ecuación General de la Hidrostática

Supongamos el volumen diferencial de la figura 2.3 sobre el que actúan unas fuerzas por unidad de volumen (G_x, G_y, G_z) en las tres direccione del espacio. Planteando el equilibrio de fuerzas en una una de las direcciones, por ejemplo la z, se tiene:

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{2}\right) dx\ dy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{2}\right) dx\ dy + G_z dx\ dy\ dz = 0 \tag{2.7}$$

donde el primero de los términos representa la fuerza actuando en la cara inferior del sólido en el sentido positivo del eje, el segundo es la fuerza sobre al cara superior actuando en el sentido negativo del eje y el tercero la fuerza en z actuando sobre todo el volumen diferencial.

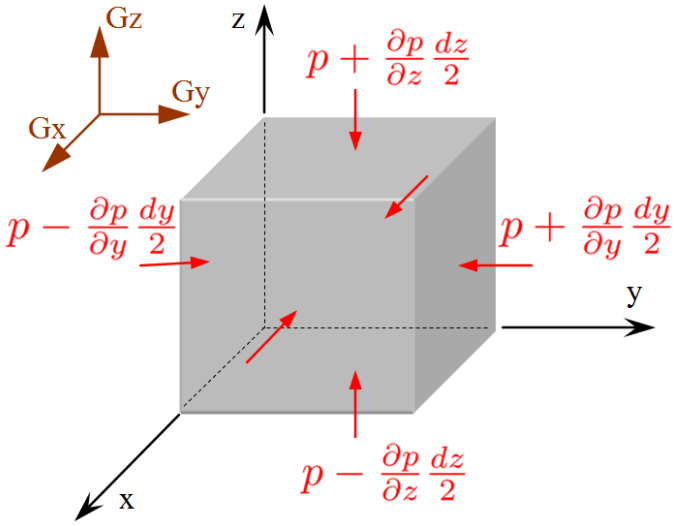


Figura 2.3: Equilibrio de fuerzas sobre un elemento diferencial

Operando, se llega a:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} dx\ dy\ dz + G_z dx\ dy\ dz = 0 \qquad \rightarrow \qquad -\frac{\partial p}{\partial z} + G_z = 0 \tag{2.8}$$

Trabajando de forma similar en los otros dos ejes, se llega al sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} + G_x = 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial y} + G_y = 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + G_z = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

Vectorialmente puede expresarse como:

$$\vec{G} = \overrightarrow{\text{grad}}\ P \tag{2.10}$$

Lo que constituye la **Ecuación General de la Hidrostática**

Observemos que el vector de fuerzas $\vec{G}$ es perpendicular a las superficies de presión constante.

Es decir, el incremento de presión que se produce entre dos caras paralelas de una partícula diferencial es igual a la fuerza actuante por unidad de volumen en la dirección normal a ambas.

2.3.1 Casos particulares

A continuación se exponen una serie de casos particulares de aplicación de la ecuación general de la hidrostática para entender más claramente las implicaciones de la misma.

Ausencia de fuerzas exteriores

La ausencia de fuerzas exteriores implica que $\vec{G} = 0$, por tanto:

$$\vec{G} = \overrightarrow{grad}\ P = 0 \qquad \rightarrow \qquad P = cte \tag{2.11}$$

Esto es lo que se denomina el **Principio de Pascal**, que se enuncia a continuación:

'En un determinado recinto donde tenemos un fluido, cualquier incremento de presión (p) que podamos ejercer en un punto se traslada instantáneamente a todos los puntos del fluido'

La aplicación práctica más conocida es la prensa hidráulica. Ésta puede verse en la figura 2.4.

Cuando analizamos la prensa hidráulica, podemos expresar:

$$P = \frac{F}{S} = \frac{F^*}{S^*} \qquad \rightarrow \qquad F^* = F\frac{S^*}{S} \tag{2.12}$$

Esto significa que con un pequeña fuerza (F) ejercida sobre el émbolo de menor sección (S) podemos elevar un gran peso (F^*) situado sobre el émbolo de mayor superficie (S^*).

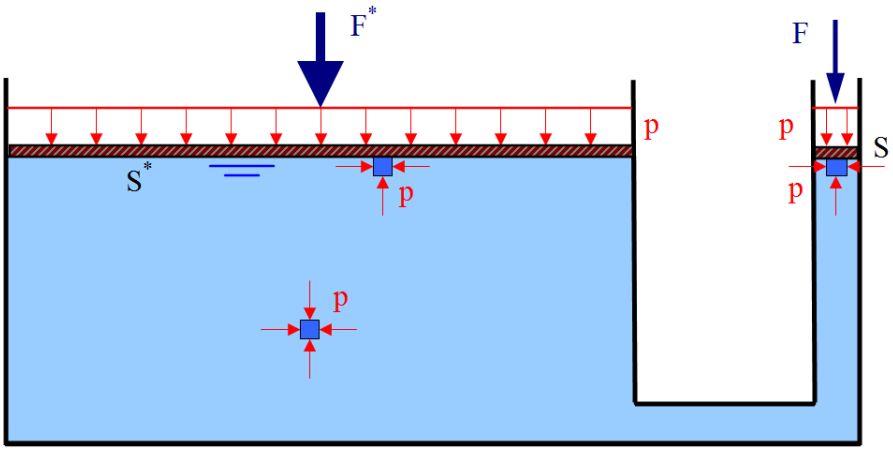


Figura 2.4: Aplicación del principio de Pascal a la prensa hidráulica

El siguiente vinculo muestra un video muy interesante de aplicación del principio de pascal aplicado a sistemas neumáticos. Cabe destacar las explicaciones entre los minutos 1:10 y 3:30

hydraulic and pneumatic part 1

Las fuerzas se derivan de un potencial ψ

Esta hipótesis es la que ocurre con las fuerzas másicas. En este caso, $\vec{G}$ puede expresarse como:

$$\vec{G} = -\rho \overrightarrow{\text{grad}}\,\psi \tag{2.13}$$

Entonces, la expresión de la ecuación general de la hidrostática (2.10) se convierte en:

$$\rho \overrightarrow{\text{grad}}\,\psi + \overrightarrow{\text{grad}}\,P = 0 \tag{2.14}$$

Por tanto:

$$\left.\begin{aligned} \rho\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \rho\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \rho\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

que vectorialmente puede expresarse como:

$$\rho\frac{\partial\psi}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \tag{2.16}$$

Multiplicando por dx_i, se llega a las tres ecuaciones siguientes:

$$\rho\frac{\partial\psi}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial p}{\partial x_i}dx_i = 0 \tag{2.17}$$

La igualdad anterior ha de cumplirse también para el conjunto de las tres ecuaciones:

$$\sum_{i=1}^{i=3}\left[\rho\frac{\partial\psi}{\partial x_i}dx_i+\frac{\partial p}{\partial x_i}dx_i\right]=0 \qquad \rightarrow \qquad \rho d\psi+dP=0 \tag{2.18}$$

Esto demuestra que, en la hidráulica, las líneas de presión constante (isobaras) coinciden con las líneas de igual potencial (equipotenciales).

El campo gravitatorio

El campo gravitatorio representa un caso particular de fuerza derivada de un potencial cuya única fuerza tiene dirección vertical y puede expresarse como:

$$\vec{G}=(0,\,0,\,-\gamma) \tag{2.19}$$

siendo γ el peso específico.

El signo negativo del peso específico viene dado por que la fuerza se dirige en el sentido contrario al eje z que se considera positivo a medida que nos alejamos de la superficie de la Tierra.

El potencial asociado a esta fuerza viene dado por:

$$\psi=gh \tag{2.20}$$

siendo g la aceleración de la gravedad, y h la altura medida en el sentido positivo del eje z.

Sustituyendo este potencial en la ecuación (2.18), se tiene:

$$dP=-\rho d\psi=-\rho g dh \tag{2.21}$$

Dividiendo por ρ:

$$\frac{dP}{\rho}=-gdh \tag{2.22}$$

lo que representa la **ecuación de la hidrostática en la vertical del campo gravitatorio.**

Líquidos incompresibles en el campo gravitatorio

Normalmente, dentro del campo de la hidráulica, trabajaremos con líquidos a los que podemos considerar como incompresibles. En ese caso, podemos considerar $\rho=$ cte y la ecuación (2.22) se puede integrar entre límites conocidos:

$$\int_{p_1}^{p_2}\frac{dP}{\rho}=-\int_{h_1}^{h_2}gdh \qquad \rightarrow \qquad \frac{p_2-p_1}{\rho}=-g\,(h_2-h_1) \tag{2.23}$$

O lo que es lo mismo:

$$\Delta P=-\rho g\Delta h=-\gamma\Delta h \tag{2.24}$$

La ecuación anterior implica que la presión, en el interior de un fluido, disminuye linealmente al aumentar la altura. Esta relación es directamente proporcional al peso específico del fluido.

Gases en el campo gravitatorio

Los gases son fluidos en los que no pueden considerarse que la densidad permanezca constante, pero sí tienen una ecuación de estado que en el caso de un gas ideal es:

$$\frac{P}{\rho} = RT \tag{2.25}$$

Se puede trabajar con la ecuación de estado y la ecuación (2.22). Además, se tiene la ecuación de evolución, que expresa la transformación que sufren algunos gases en función de su comportamiento. Así, para el caso en el que la temperatura permanezca constante durante la transformación (transformación isoterma), la ecuación de evolución viene dada por:

$$T = \text{cte} \qquad \rightarrow \qquad \frac{P}{\rho} = \text{cte} \tag{2.26}$$

En los procesos adiabáticos, la ecuación de la evolución cumple que:

$$PV^k = \text{cte} \tag{2.27}$$

Como ejemplo baste decir que la estratosfera tiene un comportamiento isotermo, mientras que la troposfera es un proceso adiabático con $k = 1,4$.

Ejemplo

Actuación conjunta de dos campos equipotenciales

Supongamos un cilindro con su eje vertical, que se encuentra rotando a velocidad angular ω constante. El cilindro se encuentra lleno de agua hasta una determinada altura.

Primero, podemos considerar la ecuación general de la hidrostática ya que las partículas de fluido no sufren movimiento relativo entre ellas.

Sobre el líquido se encuentran actuando dos campos potenciales, uno debido a la gravedad $\psi_1 = gh$, que ya se ha visto en la sección 2.3.1, y otro perpendicular a este debido a la fuerza centrífuga que actúa sobre la partícula de agua. Esta viene dada por la expresión:

$$F_c = m\omega^2 r = mA_c \tag{2.28}$$

donde $A_c = \omega^2 r$ es la aceleración centrífuga. Esta aceleración puede expresarse en función de un campo potencial dependiente de r:

$$A_c = -\frac{\partial \psi_2}{\partial r} \tag{2.29}$$

Integrando esta expresión se llega a:

$$\psi_2 = -\int A_c dr = -\int \omega^2 r dr = -\frac{\omega^2 r^2}{2} \tag{2.30}$$

Sumando ambos campos potenciales:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = gh - \frac{\omega^2 r^2}{2} \tag{2.31}$$

A continuación vamos a representar las líneas equipotenciales, que como ya se ha demostrado en la sección 2.3.1 son coincidentes con las isobaras. Para ello, buscamos una forma de la ecuación en la que podamos separar los términos en r de los términos en h (direcciones de cada uno de los campos potenciales), resultando:

$$h = \frac{\psi}{g} + \frac{\omega^2}{2g} r^2 \tag{2.32}$$

expresión correspondiente a la parábola de segundo grado mostrada en la figura 2.5

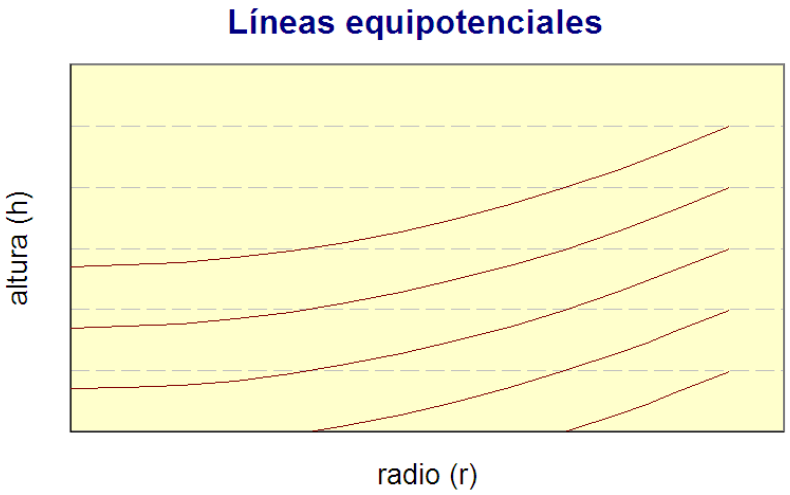


Figura 2.5: Isobaras o equipotenciales de un cilindro girando con velocidad constante

Ejemplo

Presión en la base de un cilindro girando

Un cilindro hueco de 6 cm de diámetro y 10 cm de profundidad con paredes indeformables, está lleno de agua hasta 3 cm del borde. Calcule la velocidad angular de giro ω a la que el agua llena justo el borde del cilindro, y la presión en un punto junto al contorno de la base.

Utilizando los campos potenciales deducidos en el ejemplo anterior, se tiene:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = gh - \frac{\omega^2 r^2}{2} \tag{2.33}$$

Al girar, la altura ($h = 0.10\ m$), se alcanza en el borde ($r = 0.03\ m$), por lo que:

$$\psi = 9.81 \cdot 0.10 - \frac{\omega^2 0.03^2}{2} \tag{2.34}$$

La segunda de las ecuaciones se obtiene de plantear la conservación de la masa, que es coincidente con la conservación del volumen al considerar líquido incompresible ($\rho = cte$). Si tenemos en cuenta el volumen ocupado por el agua cuando el cilindro esta parado ($h_0 = 0.10 - 0.03 = 0.07$), e integramos la ecuación de la parábola que representa la superficie libre cuando el cilindro esta rotando ($h = \frac{\psi}{g} + \frac{\omega^2}{2g} r^2$), se tiene:

$$\pi r^2 h_0 = \int_r \int_\theta \left(\frac{\psi}{g} + \frac{\omega^2}{2g} r^2 \right) r \, d\theta \, dr \tag{2.35}$$

Integrando:

$$\pi r^2 h_0 = 2\pi \frac{\psi}{g} \frac{r^2}{2} + 2\pi \frac{\omega^2}{2g} \frac{r^4}{4} \quad \rightarrow \quad h_0 = \frac{\psi}{g} + \frac{\omega^2}{4g} r^2 \tag{2.36}$$

Despejando el valor del potencial en el punto conocido del borde:

$$\psi = g h_0 - \frac{\omega^2 r^2}{4} = 9.81 \cdot 0.07 - \frac{\omega^2 0.03^2}{4} \tag{2.37}$$

Igualando las ecuaciones (2.34) y (2.37) se llega a:

$$g \frac{0.10 - 0.07}{0.03^2} = \omega^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \quad \rightarrow \quad \omega^2 = \frac{4g}{0.03} = 133.33\, g \quad \rightarrow \quad \omega = \sqrt{1308} = 36.16 \text{ r.p.s} \tag{2.38}$$

Para conocer la presión utilizamos la ecuación general de la hidrostática cuando las fuerzas actuantes se derivan del potencial (2.18):

$$\rho d\psi + dP = 0 \tag{2.39}$$

El incremento de potencial entre la equipotencial (ψ_0) que pasa por la unión de las paredes del recipiente con su base ($h = 0$ y $r = 0.03$) y la equipotencial (ψ_{sup}) que pasa por la superficie libre ($p = 0$, $h = 0.10$ y $r = 0.03$), permite calcular el incremento de presión que se produce en ese punto respecto de la superficie libre.

$$h = 0 \text{ y } r = 0.03 \quad \rightarrow \qquad \psi_0 = g h_{fondo} - \frac{\omega^2 r^2}{2} = 0.00\, g - \frac{133.33\, g\, 0.03^2}{2} \tag{2.40}$$

$$h = 0.10 \text{ y } r = 0.03 \quad \rightarrow \qquad \psi_{sup} = g h_{borde} - \frac{\omega^2 r^2}{2} = 0.10\, g - \frac{133.33\, g\, 0.03^2}{2} \tag{2.41}$$

Por tanto:

$$\Delta\psi = \psi_0 - \psi_{sup} = -0.10 g \qquad \rightarrow \qquad \Delta P = -\rho \Delta\psi = 0.10 \rho g = 0.10 \gamma \tag{2.42}$$

Lo que equivale a la altura manométrica desde el fondo a la superficie libre en el punto del contorno.

2.4 Presiones absolutas y relativas

La presión absoluta es un valor de la presión que contempla la suma de totalidad de las presiones que actúan en un determinado punto. Es por tanto un valor que nunca será negativo.

Partiendo de la ecuación general de los gases:

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T \tag{2.43}$$

y sabiendo que $n \cdot R$ es constante, se llega a que:

$$\frac{P \cdot V}{T} = \frac{P' \cdot V'}{T'} \tag{2.44}$$

Una presión (P') igual a cero significa que la temperatura del estado (T') debe ser también igual a cero, ya que no puede serlo el volumen.

$$P' = \frac{P \cdot V \cdot T'}{V' \cdot T} = 0 \qquad \rightarrow \qquad T' = 0 \tag{2.45}$$

En esta ecuación es muy importante tener en cuenta el hecho de que las temperaturas son temperaturas absolutas, y por tanto, se expresan en grados Kelvin.

Habitualmente, y sobre todo en el caso de líquidos, se trabaja con el concepto de presión relativa, siendo ésta la variación de presión medida en el interior del fluido desde la superficie libre. Es decir la presión a la profundidad a la que se realiza la medida teniendo en cuenta que el aparato de medida toma como presión cero la correspondiente a la presión atmosférica (P_{atm}) en un punto de la superficie del líquido pero fuera de éste. Este es el caso de los manómetros en tuberías o los utilizados por los submarinistas para conocer la profundidad de inmersión.

En este caso existe una relación entre la presión absoluta (P_{abs}) y la relativa (P_{rel}) dada por la ecuación:

$$P_{abs} = P_{rel} + P_{atm} \tag{2.46}$$

En el caso de considerar presiones relativas, sí pueden obtenerse valores negativos de la presión, basta con hacer el vacío en un recipiente donde el aire se encuentra encerrado a presión atmosférica.

La presión atmosférica equivale a 101325 N/m^2 (Pascales).

Otra forma de expresar la presión habitualmente utilizada cuando trabajamos con fluidos, y especialmente con líquidos, es en metros de columna de líquido equivalente. Esta altura es el resultado de dividir la expresión (2.47) entre el peso específico del líquido. En el caso particular del agua, se habla de metros de columna de agua (m.c.a.), utilizándose para ello el valor del peso específico del agua (γ). A modo de ejemplo una presión absoluta expresada en m.c.a. resulta:

$$\frac{P_{abs}}{\gamma} = \frac{P_{rel}}{\gamma} + \frac{P_{atm}}{\gamma} \tag{2.47}$$

En este caso el término $\frac{P_{rel}}{\gamma}$ se corresponde con la profundidad (d), en metros, a la que medimos la presión en el interior del fluido.

La altura de presión atmosférica en el caso del agua equivale a:

$$h_{atm} = \frac{P_{atm}}{\gamma} = \frac{101325 \text{ N/m}^2}{9810 \text{ m/s}^2} = 10.33 \text{ m.c.a.} \tag{2.48}$$

Un ejemplo de nuestra vida habitual en el que estamos acostumbrados a medir presiones mediante alturas de fluido equivalente es el barómetro de mercurio donde los 760 mm de altura de columna de mercurio equivalen a 1 atmósfera:

$$\frac{P_{atm}}{\gamma_{Hg}} = \frac{101325}{13579 \cdot 9.81} = 0.760 \text{ m.c.Hg.} = 760 \text{ mm}_{Hg} \tag{2.49}$$

Nota

Esta forma habitual de medir presiones manométricas también se utiliza para obtener la altura de impulsión de un sistema de bombeo. Hay que tener en cuenta que es dependiente del valor de la gravedad en el punto de medida ($\gamma = \rho \cdot g$), lo que muchas veces tiende a olvidarse. Por ejemplo, en la luna, un sistema de bombeo especificado con este estándar, o un manómetro terrestre, tienen que ser adecuadamente transformados a las condiciones de gravedad de nuestro satélite.

Cuando hablamos únicamente de presiones relativas en fluidos incompresibles ($\rho = cte$) sometidos al campo gravitatorio (ecuación (2.24)), se tiene que en un punto cualquiera del fluido situado a una profundidad d de la superficie del mismo se cumple:

$$h + \frac{P}{\gamma} = h + d = cte \tag{2.50}$$

siendo h la altura del punto desde una superficie de referencia. Hay que tener en cuenta que el sentido positivo de h es en sentido vertical creciente, mientras que la profundidad d crece en el sentido negativo del mismo.

Esto es lo que conocemos como **altura piezométrica**.

2.5 Empujes sobre superficies planas

El empuje de las presiones sobre una superficie plana siempre se puede realizar dibujando el diagrama de presiones perpendicular a la misma y procediendo a su integración, obteniéndose así el valor del empuje y su punto de aplicación.

En el presente apartado se justifica matemáticamente un sistema que permite la obtención del empuje sobre una superficie plana mediante:

$$E = \gamma \, d_{cdg} \, S \tag{2.51}$$

siendo:

γ	Peso específico del fluido	(N/m^3)
d_{cdg}	Profundidad vertical a la que se encuentra el centro de gravedad de la superficie sumergida sobre la que actúan los empujes	(m)
S	Superficie a integrar sobre la que actúan los empujes	(m^2)

En cualquier caso el primer paso es siempre dibujar el diagrama de empujes tanto para evitar posibles fallos como por la claridad que representan a la hora de comprender el problema que se resuelve.

Supongamos la superficie abatida S contenida en el plano A-B perpendicular al plano del dibujo, e inclinado un ángulo α respecto de la vertical.

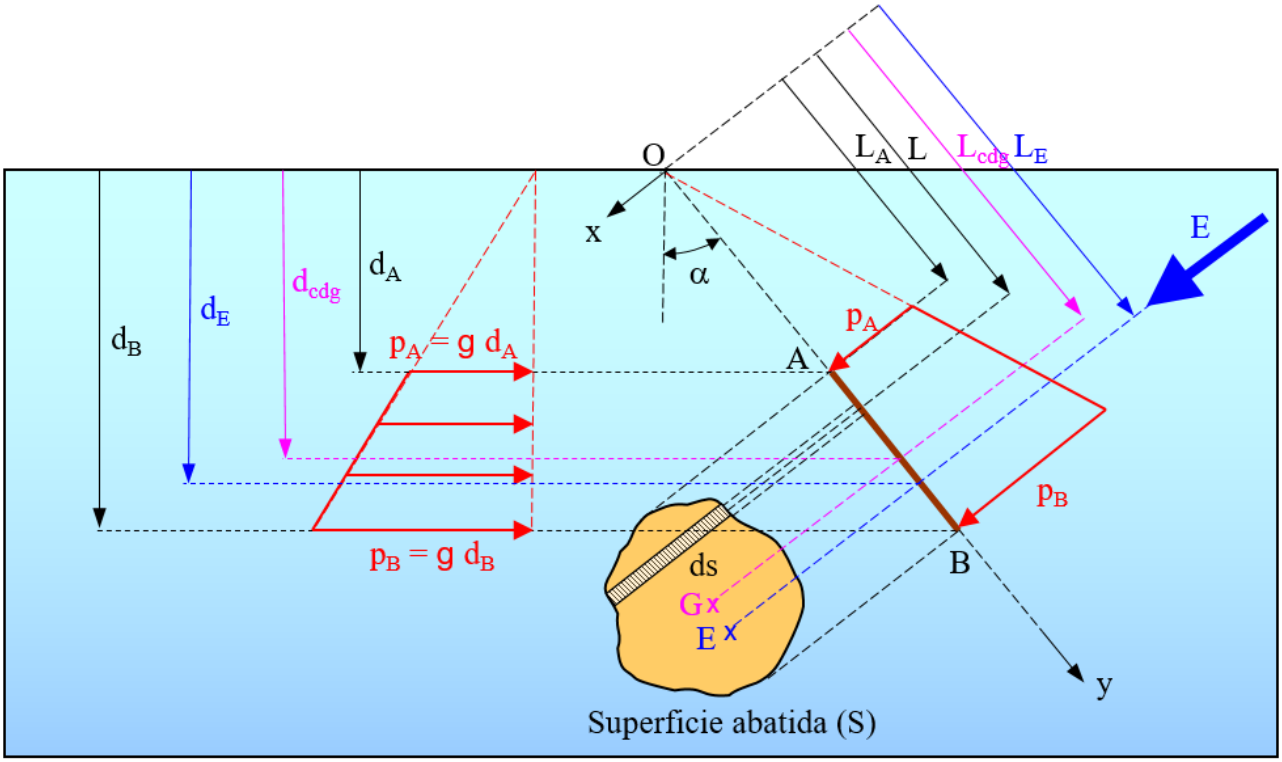


Figura 2.6: Empujes sobre una superficie plana

El punto de mínimo empuje (A), tiene una presión $P_A = \gamma\, d_A$, mientras que al punto de máxima presión (B) le corresponderá una presión de $P_B = \gamma\, d_B$, siendo d_A y d_B las profundidades de los puntos A y B respectivamente, con $d_B > d_A$.

Sean L_A y L_B las distancias medidas sobre el plano que contiene a la superficie de los puntos A y B, medidos desde el corte de ese plano con la superficie libre (O).

Si denominamos $p = \gamma\, d$ a la presión que se aplica al diferencial de superficie (ds) con profundidad d constante, se tiene que el empuje sobre la totalidad de la superficie viene dado por:

$$E = \int_S p\, ds = \gamma \int_S d\, ds = \gamma \int_S L \cos\alpha\, ds = \gamma \cos\alpha \int_S L\, ds \tag{2.52}$$

siendo L la distancia a la que se encuentra el diferencila de superficie ds medida sobre el plano de la superficie y tomando como origen el punto O.

Analizando el término $\int_S L\, ds$ se observa que es el momento de primer orden o momento estático de la superficie S respecto del eje perpendicular al plano del dibujo que pasa por el punto O. Por

tanto, puede expresarse como:

$$\int_S L\,ds = L_{cdg} S \tag{2.53}$$

siendo:

L_{cdg} Distancia, sobre el plano que contiene a la superficie, del centro de gravedad de la misma medida respecto del eje que pasa por el punto O (m)

Sustituyendo en la ecuación (2.52), se tiene:

$$E = \gamma \cos \alpha \int_s L\,ds = \gamma \cos \alpha\, L_{cdg}\, S = \gamma\, d_{cdg}\, S = P_{cdg}\, S \tag{2.54}$$

Por tanto, se puede afirmar que *'el empuje sobre una superficie plana sumergida en un fluido incompresible por efecto de las presiones relativas equivale al valor de la presión en el centro de gravedad de la sección multiplicada por el área de la misma.'*

2.5.1 Obtención de la resultante del empuje sobre superficies planas

La formulación anterior facilita el cálculo de la resultante del empuje pero no su ubicación, lo que tiene importancia a la hora de determinar los momentos actuantes sobre la superficie.

Tomando momentos respecto del eje perpendicular al plano del dibujo que pasa por O mostrado en la figura 2.6, se tiene:

$$M_o = E \cdot L_e = \int_S p\, L\, ds = \gamma \cos \alpha \int_s L^2\, ds = \gamma \cos \alpha\, I_{O_x} \tag{2.55}$$

siendo:

L_e Distancia, sobre el plano que contiene a la superficie, del punto de aplicación de la resultantes de empujes medida respecto del eje que pasa por el punto O (m)

I_{O_x} Momento de inercia de la superficie S respecto del eje perpendicular al dibujo que pasa por el punto O (m^4)

Despejando L_e en la ecuación anterior, y sustituyendo el valor del empuje obtenido de la ecuación (2.54) se llega a:

$$L_e = \frac{\gamma \cos \alpha\, I_{O_x}}{\gamma \cos \alpha\, L_{cdg}\, S} = \frac{I_{O_x}}{L_{cdg}\, S} \tag{2.56}$$

Teniendo en cuenta el teorema de Steiner para obtener la inercia en el eje O respecto de la inercia que pasa por el centro de gravedad de la sección (I_{cdg}), se tiene que:

$$L_e = \frac{I_{cdg} + L_{cdg}^2 S}{L_{cdg}\, S} = L_{cdg} + \frac{I_{cdg}}{L_{cdg} S} \tag{2.57}$$

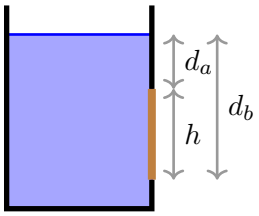
Nota

Para la aplicación de esta fórmula es necesario trabajar con presiones relativas, y con el punto O situado en el contacto del plano que contiene a la superficie con la superficie libre. En caso contrario no puede calcularse el momento como $M = E \cdot L_e$

El problema es cuando la superficie no es simétrica respecto de la línea A-B porque en ese caso habría que hacer la integración respecto de un eje paralelo a A-B para conocer la situación de la resultante de empujes medida en la dirección perpendicular al plano del dibujo.

Ejercicio 3

La compuerta rectangular de la figura tiene un ancho $b = 2.0\ m$ y esta sumergida desde la profundidad $d_a = 1.2\ m$ a la $d_b = 3.2\ m$. El peso específico del fluido en el depósito es $\gamma = 9810\ N/m^3$



Test.

1. Calcular la fuerza resultante debido al empuje del agua Ans N

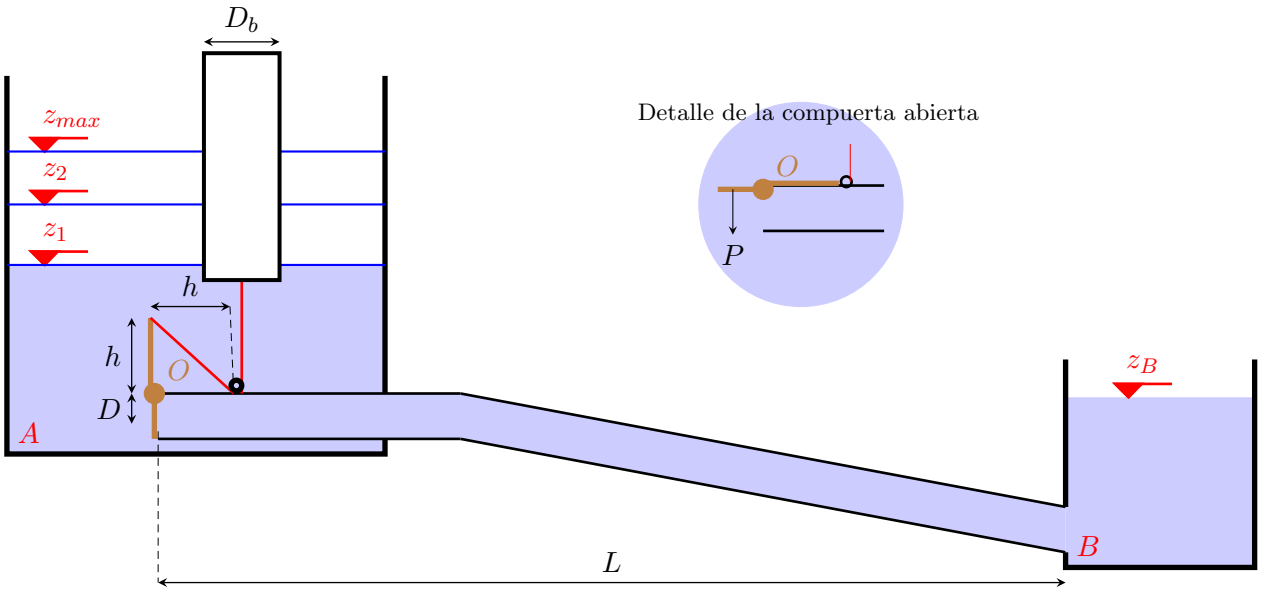
2. Calcular su posición desde la superficie Ans m

Pulsar sobre la palabra ejercicio 3 al comienzo para ver la solución

A continuación se propone la parte del ejercicio de examen de la convocatoria de julio de 2013 referente a temas de presión.

Ejercicio 4

Los depósitos A y B están unidos por una tubería de diámetro $D = 0.3\ m$, rugosidad $\varepsilon = 0.5\ mm$ y longitud $L = 300\ m$. El depósito B tiene el nivel constante a la cota $z_B = 3\ m$. El depósito A tiene un nivel variable pero no se quiere que supere la cota $z_{max} = 8\ m$. Con objeto de controlar el nivel de este depósito se dispone una compuerta que puede cerrar herméticamente en el extremo del depósito A de la tubería. Esta compuerta rota alrededor del punto 0 situado en el extremo alto de la tubería a la cota $z_t = 3\ m$. La compuerta se encuentra regulada por el mecanismo de boya cilíndrica de diámetro D_b mostrado en el esquema. El cable que une el brazo de longitud $h = 0.6\ m$ de la compuerta es de peso y elongación despreciables y comienza a tensarse cuando el nivel del depósito esta en $z_1 = 5\,m$.



Test.

1. Calcular el empuje E_h sobre la compuerta al llegar el agua a la cota máxima z_{max}. Suponer el espesor de la tubería despreciable. Ans N

2. Calcular el diámetro necesario de la boya D_b para que se abra la compuerta en el caso anterior. Ans m

3. Calcular el peso sumergido P de la compuerta para que esta comience a cerrarse, desde su posición de máxima apertura, cuando el nivel en A es $z_2 = 6\ m$. Desprecie el peso del brazo de la compuerta y las fuerzas hidrodinámicas que afectan a la compuerta (solo se pide el comienzo por ser el proceso de cierre un problema altamente complejo). Ans N

4. Calcular la fuerza en el cable F_2 en ese instante. Ans N

5. Se quiere reducir la cota máxima de A variando la cota de B. ¿Habrá que [reducir] o [aumentar] esta cota?. Escribir la palabra entre corchetes. Ans

Pulsar sobre la palabra ejercicio 4 al comienzo para ver la solución

2.6 Empuje sobre superficies curvas

Igual que en el caso anterior, la resultante del empuje puede obtenerse mediante integración directa, lo que en algunos casos puede incluso simplificar el problema, pero en otros la aplicación del Método de Poincaré que a continuación se enuncia simplificará el problema.

2.6.1 Método de Poincaré

Este método se podría enunciar como *'El empuje resultante en una dirección de la presión aplicada a cualquier superficie es igual al empuje debido la presión sobre la proyección de dicha superficie sobre un plano perpendicular a la dirección en la que se quiere conocer el empuje más la variación de presión según dicha dirección desde el plano de proyección hasta la superficie'*

Supongamos la superficie curva de la figura 2.7, sobre la que se toma el dl mostrado.

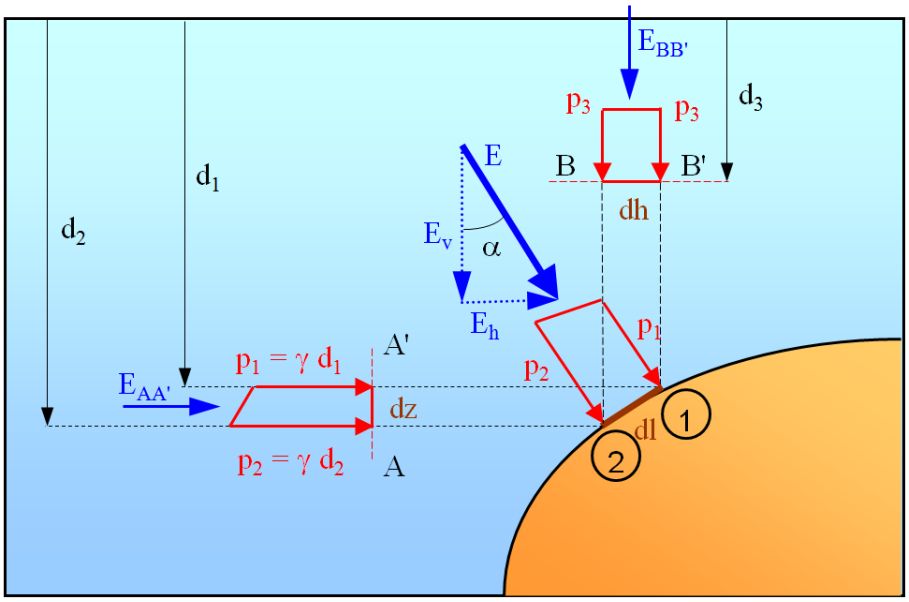


Figura 2.7: Empujes sobre superficie curva. Método de Poincaré

A continuación va a estudiarse la resultante de empujes (E) sobre ese elemento dl y los empujes horizontales sobre la proyección del dl en la línea vertical AA'.

$$E = \frac{p_1 + p_2}{2} dl \tag{2.58}$$

siendo:

p_1	Presión a la profundidad d_1	(N/m^2)
p_2	Presión a la profundidad d_2	(N/m^2)

Las componentes horizontal y vertical de este empuje son respectivamente:

$$E_h = E \text{ sen } \alpha \qquad E_v = E \cos \alpha \tag{2.59}$$

En la longitud dz correspondiente a la proyección de dl sobre la línea vertical AA' el empuje resulta:

$$E_{AA'} = \frac{p_1 + p_2}{2} dz \tag{2.60}$$

Si expresamos el dz en función del dl y el ángulo α de inclinación de esta línea con la vertical, se tiene:

$$dz = dl \cos \alpha \tag{2.61}$$

Sustituyendo dz en la ecuación (2.60), vemos que coincide con el valor de E_h dado en la expresión (2.59). Por tanto:

$$E_{AA'} = E_h \tag{2.62}$$

Si extendemos este cálculo, que es independiente del ángulo α del elemento dl, a toda la línea curva, entonces resulta que la resultante de empujes horizontales sobre la línea curva tiene el mismo valor que la resultante sobre la proyección en un plano vertical cualquiera de las presiones actuantes en función de la profundidad.

Nota

Hay que tener en cuenta que este cálculo se ha realizado en un fluido donde la única fuerza másica actuante es la correspondiente a la gravedad. En este caso, la única variación de la presión es debida a la profundidad (ver sección 2.3.1). En el caso de existir aceleraciones en otro eje que no sea el vertical, habría que tener en cuenta la variación de presión en ese eje.

Cuando se estudia el empuje vertical hay que considerar la presión sobre la proyección de la curva dl en BB' más la variación de la presión con la profundidad que hay desde el plano de referencia (BB') hasta la superficie (1-2).

$$E_v = E_{BB'} + \frac{E_{B'1} + E_{B2}}{2} dh = p_3 dh + \frac{(p_1 - p_3) + (p_2 - p_3)}{2} dh = \frac{p_1 + p_2}{2} dh = \gamma \frac{d_1 + d_2}{2} dh \tag{2.63}$$

En realidad, independientemente del plano de referencia horizontal utilizado, las presiones verticales, cuando la única fuerza actuante es la gravedad, se corresponden con el área encerrada entre el sólido y la superficie libre multiplicada por el peso específico (γ).

Nota

Todo el razonamiento anterior se ha realizado sobre las líneas dl, dz y dh, cuando en realidad éstas serán áreas que se proyectan en las superficies AA' y BB'. Entre ambas se formará un volumen cilíndrico.

Este razonamiento es válido para la proyección sobre cualquier plano, siempre que mantengamos las presiones (p_1 y p_2) que actúan a ambos lados del elemento dl.

Toda la justificación anterior es igualmente válida cuando en vez de tomar elementos diferenciales de longitud dl, utilizamos elementos diferenciales de área dA, con lo que se puede extender la formulación a empujes sobre volúmenes sólidos.

En realidad, todo este comportamiento concuerda con la deducción del tensor de tensiones esférico realizado en la sección 2.2 más la variación del valor escalar de la presión debido a la actuación del campo gravitatorio en líquidos incompresibles.

2.7 Flotación

2.7.1 Equilibrio del sólido sumergido. Empuje de Arquímedes

Arquímedes (287 al 212 A.C.) estudió el problema de la flotación de los empujes en sólidos sumergidos, enunciando el siguiente principio.

'El empuje vertical ascendente de un cuerpo sumergido en un fluido es igual al peso del volumen del líquido desalojado'

Físicamente estamos acostumbrados a observar sólidos que cuando son sumergidos en agua se hunden, mientras que otros ascienden a la superficie hasta alcanzar su posición de equilibrio a flote. El principio de Arquímedes lo que enuncia es que los volúmenes sólidos con una densidad media mayor que la del fluido en el que se sumergen se hunden, mientras que los que ascienden tendrán una densidad media menor que la del fluido. En caso de tener una densidad media igual a la del fluido en que se encuentra sumergido el equilibrio es indiferente y el sólido puede estar sumergido a cualquier profundidad sin experimentar movimiento alguno mientras no se le aplique una fuerza que modifique este estado de equilibrio.

Para demostrar este principio vamos a aplicar el Principio de Poincaré a los empujes horizontales y verticales sobre un sólido sumergido.

Empujes horizontales sobre un sólido sumergido

Estudiemos el esquema de presiones actuando sobre la superficie diferencial horizontal mostrada en la figura 2.8

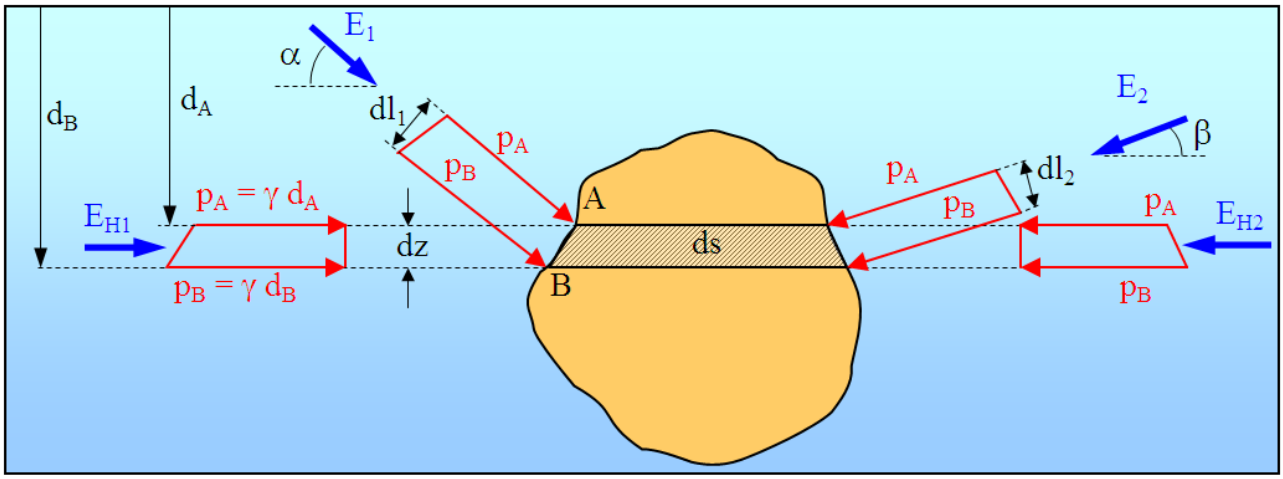


Figura 2.8: Empujes horizontales sobre un sólido sumergido

Si E_1 y E_2 son las resultantes de empujes sobre los elementos de longitud dl_1 y dl_2 respectivamente, dados por:

$$E_1 = \frac{p_A + p_B}{2} dl_1 \qquad E_2 = \frac{p_A + p_B}{2} dl_2 \tag{2.64}$$

siendo:

p_A Presión a la profundidad d_A (N/m^2)
p_B Presión a la profundidad d_B (N/m^2)

Las componentes horizontales del empuje son respectivamente:

$$E_{H1} = E_1 \cos \alpha \qquad E_{H2} = E_2 \cos \beta \tag{2.65}$$

Si aplicamos el Principio de Poincaré a ambos empujes horizontales se cumple que:

$$E_H = \frac{p_A + p_B}{2} dz = E_{H1} = E_{H2} \tag{2.66}$$

siendo:

dz Diferencial de profundidad en el que se extienden los diferenciales de superficie dl_A y dl_B (m)

Aplicando $dz = dl_1 \cos \alpha = dl_2 \cos \beta$ se hubiera llegado a la misma solución.

Este razonamiento puede aplicarse igualmente a un volumen, solo que su representación gráfica es más compleja. En cualquier caso, se puede ver que ha de cumplirse para cada rebanada diferencial de superficie tomada en el plano paralelo al del dibujo.

Como implicación de la afirmación anterior, se deduce que la resultante de empujes horizontales sobre un cuerpo sumergido, sin aceleración en este eje, es nula independiente de la profundidad a la que se encuentre. Hay que tener en cuenta que esto no significa que las presiones sean nulas, sino solamente su resultante, ya que las presiones a grandes profundidades son muy importantes y podrían, por ejemplo, romper el casco de un submarino.

Empujes verticales sobre un sólido sumergido

Vamos a realizar un razonamiento similar al del apartado anterior para determinar la resultantes de empujes verticales sobre un sólido sumergido.

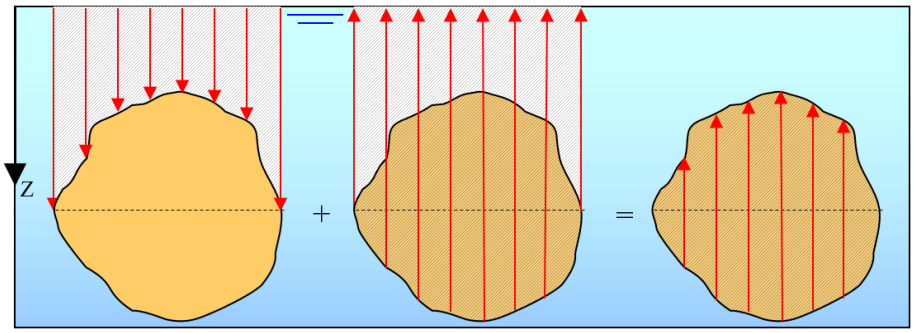


Figura 2.9: Empujes verticales sobre un sólido sumergido

A la izquierda de la figura 2.9 están representados los empujes verticales sobre la parte superior del sólido sumergido, cuya resultante tiene la dirección del eje Z negativo, mientras que en el centro

se tienen los empujes verticales sobre la parte inferior del sólido. Estos últimos tienen la dirección positiva del eje Z. En ambos casos se ha utilizado el método de Poincaré para determinar el valor de la componente vertical del empuje, utilizando como línea de referencia la correspondiente a la superficie libre. Dado que el empuje en un punto tiene el valor de la profundidad en el punto multiplicada por el peso específico del líquido en que se encuentra sumergido, y éste último es factor común a todos ellos, en la representación se ha utilizado el valor de la profundidad como la escala de representación de empujes.

Por tanto, el empuje vertical hacia abajo sobre la parte superior del sólido sumergido (figura 2.9 izquierda) equivale al área rallada multiplicada por el peso específico del liquido en que se sumerge (γ), y el empuje vertical hacia arriba sobre la parte inferior del sólido sumergido (figura 2.9 centro) equivale al área rallada multiplicada por el peso específico del liquido en que se sumerge (γ).

De la suma de ambos empujes (figura 2.9 derecha) resulta el área del sólido sumergido multiplicada por el peso específico del líquido, lo que se corresponde con el empuje ascendente de Arquímedes, cuando en vez de trabajar en dos dimensiones (áreas en papel) lo hacemos con volúmenes siguiendo el mismo razonamiento.

Otra forma alternativa de ver el mismo problema es bajo el siguiente prisma:

- Hay sólidos que cuando se sumergen en un líquido se hunden hasta el fondo independientemente de lo alejado que éste pueda estar.
- Hay solidos que cuando se sumergen en un líquido ascienden hasta la superficie donde se quedan flotando.
- En la hidrostática no hay movimiento relativo de las partículas, por lo tanto, si se encierra un determinado volumen de partículas dentro de un volumen, éstas están en equilibrio con las adyacentes, sin ascender o hundirse. En este caso, el peso del volumen encerrado debe ser igual al empuje de Arquímedes, o el desequilibrio entre el peso y el empuje produciría un movimiento. Esto puede escribirse como:

$$E_a = \gamma V \tag{2.67}$$

  Siendo V el volumen de partículas encerradas del líquido dentro de nuestro volumen, y γ el peso específico de las partículas en ese volumen, que coincide con las del líquido en las que están sumergidas.

2.7.2 Tensión efectiva

La tensión efectiva es el diagrama de tensiones que transmite el sólido sumergido al fondo sobre el que se apoya.

Supongamos el sólido representado en la figura 2.10 izquierda

La presión transmitida por la columna de agua de peso específico γ_a sobre el fondo en un punto

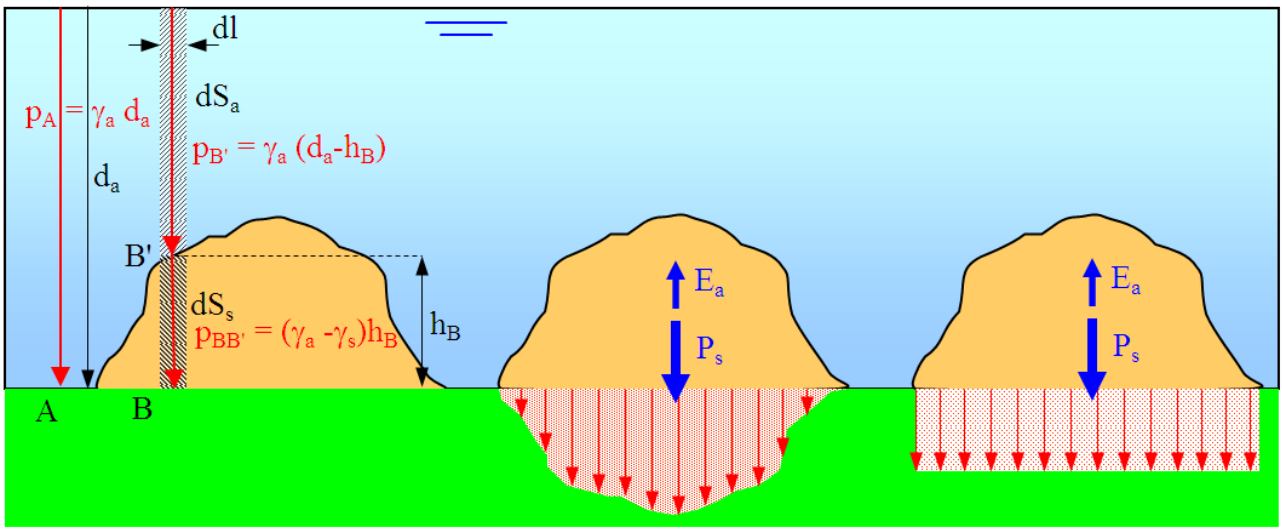


Figura 2.10: Tensiones efectivas transmitidas por un solido apoyado en el fondo

donde no está el sólido (punto A), a una profundidad d_A, es:

$$P_A = \gamma_a d_A \tag{2.68}$$

El valor de la presión transmitida al punto B, situado bajo el sólido, será la correspondiente al peso de la columna de agua de área dS_a en B' más el peso del diferencial de superficie (dS_s) del plano.

La presión se determina por el peso de los diferenciales de área dividido por el diferencial de longitud (dl) sobre el que actúa. Por tanto, la presión en B es:

$$P_B = \frac{dS_a\gamma_a + dS_s\gamma_s}{dl} \tag{2.69}$$

siendo:

γ_a	Peso específico del líquido	(N/m^3)
γ_s	Peso específico del sólido	(N/m^3)

El primer sumando de la ecuación (2.69) puede ponerse como el peso de la columna de agua hasta el fondo menos el peso de la columna de agua del punto B a B', resultando:

$$P_B = \frac{(dS_a + dS_s)\gamma_a - dS_s\gamma_a + dS_s\gamma_s}{dl} = d_A\gamma_a - h_b\gamma_a + h_b\gamma_s \tag{2.70}$$

El primer termino de la ecuación (2.70) coincide con la ecuación (2.68), el segundo es el empuje de Arquímedes y el tercero es el peso del sólido. La diferencia entre las ecuaciones (2.68) y (2.70) es la tensión efectiva añadida por la existencia del sólido, y se corresponde con el peso del solido sumergido (peso del sólido menos empuje de Arquímedes)

$$\sigma_{efec} = h_b\,(\gamma_s - \gamma_a) \tag{2.71}$$

En principio podríamos suponer una presión efectiva como la mostrada en la figura 2.10 centro, lo que ocurre es que en el interior del sólido rígido existe redistribución de tensiones, que depende también de los módulos de elasticidad relativos entre el sólido sumergido y el fondo sobre el que se apoya, pudiendo tener un esquema simplificado como el que se muestra en la figura 2.10 derecha, pero que escapa del alcance de la hidráulica.

Ambos diagramas de tensiones efectivas tienen el mismo valor integrado de las tensiones (V) e iguales al peso total del sólido sumergido (peso total del sólido (P_s) menos el empuje de Arquímedes E_a).

$$V = P_s - E_a \tag{2.72}$$

En la realidad se tendría un diagrama de tensiones entre los mostrados en la figura 2.10 en el centro y la derecha.

2.7.3 Subpresión

A continuación vamos a suponer que entre el sólido sumergido y el fondo penetra el fluido. Las partículas que se encuentran en la separación entre ambos tienen una presión equivalente a la columna de agua que tienen encima ($P_a = \gamma_a d_A$). Esta presión se ejerce con sentido ascendente sobre la parte inferior del sólido sumergido, que es lo que se denomina **subpresión**, y hacia abajo sobre el fondo, coincidiendo con la presión que se ejerce sobre el punto A en la figura 2.10 izquierda. Por tanto, la suma de presiones que tenemos por encima de este punto coincidirá con la tensión efectiva.

Si se realiza este cálculo, se tiene la columna de agua actuando por encima del sólido, más el peso del sólido menos el empuje de agua hacia arriba en la parte inferior del solido. Si sumamos el término primero de presión de agua sobre la parte superior del sólido más el empuje ascendente por debajo, se tiene como resultado el empuje de Arquímedes, con lo que las presiones efectivas coinciden con las obtenidas en la sección 2.7.2, exista, o no, agua por debajo.

Lo que realmente cambia la existencia de la subpresión es la fuerza necesaria para levantar el sólido sumergido.

- En el caso de existir subpresión, la fuerza necesaria para elevar el sólido mientras se encuentra totalmente sumergido se corresponde con el peso del sólido menos el empuje de Arquímedes.
- En el caso de no existir subpresión, la fuerza necesaria para levantar el sólido se corresponde con el peso del sólido más el peso de la columna de agua por encima del mismo. En este caso se realiza más fuerza cuanto más sumergido esté el sólido.

La realidad es que es muy difícil situar un sólido sobre un fondo sin que exista subpresión, ya que incluso en las obras cimentadas en seco sobre roca sana, como muchas presas, el agua, cuando se llena el embalse, penetra por los poros de la roca y la presa adoptan la presión deducida de la circulación de agua a través del medio en cada uno de los puntos. La circulación en este campo potencial se explica más detalladamente en el capítulo 9 del medio poroso.

En cualquier caso, un ejemplo se corresponde con el tapón de la bañera. Cuando está situado sobre el fondo de la misma sin estar en su agujero, la fuerza necesaria para elevarlo es muy pequeña, ya que existe subpresión. En el caso de estar correctamente colocado, por debajo de él hay aire con presión igual a la atmosférica, por tanto con presión relativa nula, y para levantarlo la fuerza necesaria se corresponde con la del caso anterior más el peso de toda la columna de agua que tiene por encima, por lo que si la bañera se encuentra llena hasta un nivel elevado, esta fuerza es muy grande comparada con el caso anterior.

En general, la subpresión es un fenómeno muy a tener es cuenta en el diseño ingenieril porque puede actuar muy del lado de la inseguridad, como en el caso de las presas, o el dimensionamiento de obras de amarre mediante boya con muerto en el fondo.

Ejemplo

Subpresión bajo una presa de gravedad.

Supongamos la presa de gravedad representada de forma esquemática en la figura 2.11, construida en hormigón de peso específico relativo $\gamma_h = 2.35$, y con un nivel de agua, aguas arriba de la presa de 100 m y nulo aguas abajo. Se nos pide calcular la anchura L_A de la base para que la presa no deslice ni vuelque sobre el punto O, suponiendo un coeficiente de rozamiento entre la base de la presa y la cimentación de $\rho = 0.7$

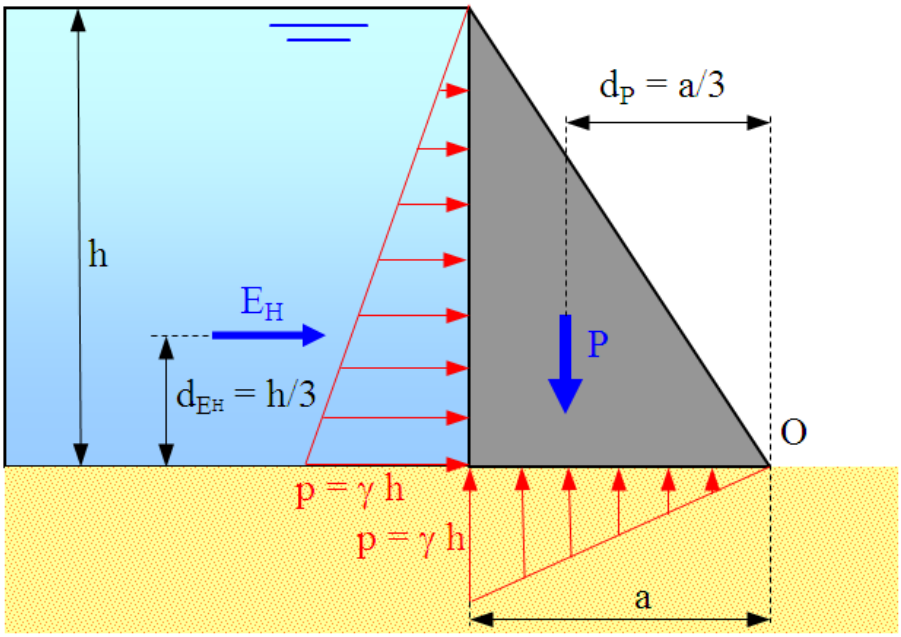


Figura 2.11: Representación esquemática de una presa de gravedad

El empuje horizontal del agua sobre el paramento aguas arriba es:

$$E_H = \frac{1}{2}\gamma h^2 = \frac{9810}{2}100^2 = 49050000\,N \tag{2.73}$$

y su brazo es $d_{E_H} = \frac{h}{3} = 33.33\ m$

El peso (P) de la presa viene dado por:

$$P = \frac{1}{2}\gamma_h\, a\, h = \frac{9810 \cdot 2.35}{2} 100\, a = 490500 \cdot 2.35\, a = 1152675\, a \tag{2.74}$$

y su brazo es $d_P = \frac{2a}{3} = 0.667\, a$ metros

Consideremos primero la solución sin subpresión.

- Coeficiente de seguridad a deslizamiento $C_{sd} = 1$:

$$C_{sd} = \frac{\rho E_v}{E_H} = \rho \frac{P}{E_H} = 0.7 \frac{490500 \cdot 2.35\, a}{49050000} = 0.007 \cdot 2.35\, a = 1.0 \qquad \rightarrow \qquad a = 60.79\, m \tag{2.75}$$

- Coeficiente de seguridad a vuelco $C_{sv} = 1$:

$$C_{sv} = \frac{M_E}{M_v} = \frac{P d_P}{E_H d_{E_H}} == \frac{490500 \cdot 2.35\, a \frac{2a}{3}}{49050000 \frac{100}{3}} = \frac{4.70}{10000} a^2 = 1.0 \qquad \rightarrow \qquad a = 46.13\, m \tag{2.76}$$

Por tanto, el ancho de la base sería el mayor de ambos $a = 60.79$ metros.

Cuando se considera el caso con subpresión, aparece el diagrama inferior de empujes mostrado en la figura 2.11 que disminuye el peso propio, resultando un nuevo valor del peso (P') dado por:

$$P' = \frac{1}{2}\left(\gamma_h - \gamma\right)\, a\, h = \frac{9810\,(2.35 - 1.00)}{2} 100\, a = 490500 \cdot 1.35\, a = 662175\, a \tag{2.77}$$

- Coeficiente de seguridad a deslizamiento $C_{sd} = 1$:

$$C_{sd} = \frac{\rho E_v}{E_H} = \rho \frac{P'}{E_H} = 0.007 \cdot 1.35\, a = 1.0 \qquad \rightarrow \qquad a = 105.82\, m \tag{2.78}$$

- Coeficiente de seguridad a vuelco $C_{sv} = 1$:

$$C_{sv} = \frac{M_E}{M_v} = \frac{P' d_P}{E_H d_{E_H}} = \frac{2.70}{10000} a^2 = 1.0 \qquad \rightarrow \qquad a = 60.86\, m \tag{2.79}$$

En este caso el ancho de la base sería $a = 105.82$ metros.

Evidentemente, el no tener en cuenta el efecto de la subpresión es claramente perjudicial para la estabilidad de la presa.

Nota

Se ha considerado que la subpresión lo que hace es disminuir el peso de la presa y por eso se le resta a éste. No se trata a la subpresión como un momento volcador, sino como un estabilizador negativo

Ejemplo

Fuerza necesaria para quitar un tapón.

Calcular la fuerza necesaria para quitar un tapón de bañera circular indeformable de radio r, espesor e, densidad γ_s, sumergido en el fondo de una bañera con altura de agua H en los dos casos siguientes.

- Esta apoyado en el fondo.
- Esta tapando completamente el desagüe con la superficie inferior del mismo.

Aplicarlo al caso de $H = 1.0\ m$, $r = 10.0\ cm$, $e = 1.0\ cm$, $\gamma_s = 1.5\ t/m^3$ y $\gamma = 1.0\ t/m^3$

En ambos casos no hay resultante de empujes horizontales por que se elimina (aunque sí tendremos presión horizontal sobre el tapón). Las acciones se limitarán únicamente al eje vertical.

- Peso del tapón:
$$P = \gamma_s V = \gamma_s \pi r^2 e \tag{2.80}$$
- Empuje vertical sobre la parte alta del tapón: Tomando como superficie de referencia el fondo de la bañera, se puede expresar como el peso del cilindro de agua de radio r que va de la superficie al fondo menos el peso en agua del cilindro de radio r y espesor e:
$$Ev_1 = \pi r^2 \left(H - e\right) \gamma \tag{2.81}$$
- Subpresión bajo el tapón: Esta acción solo actúa en el primero de los casos, ya que en el segundo la presión que se tiene por debajo es la correspondiente a la atmosférica (presión relativa nula).

  La subpresión se puede calcular como en el caso anterior, tomando como altura H y teniendo en cuenta que su sentido es hacia arriba.
$$Ev_2 = \pi r^2 H \gamma \tag{2.82}$$

La diferencia entre ambos casos radica en los términos considerados a la hora de calcular la fuerza resultante:

- Tapón apoyado en el fondo: $F_1 = P + Ev_1 - Ev_2$
$$F_1 = \gamma_s \pi r^2 e + \pi r^2 \left(H - e\right) \gamma - \pi r^2 H \gamma = \left(\gamma_s - \gamma\right) \pi r^2 e \tag{2.83}$$
  que coincide con el peso sumergido del tapón.
- Tapón sobre el desagüe: $F_2 = P_s + Ev_1$
$$F_2 = \gamma_s \pi r^2 e + \pi r^2 \left(H - e\right) \gamma = \gamma \pi r^2 \left[H + e\left(\gamma_s' - 1\right)\right] \tag{2.84}$$
  siendo $\gamma_s' = \frac{\gamma_s'}{\gamma}$ la densidad relativa del tapón.

Aplicando los datos del enunciado:

$H = 1.0\ m$, $r = 0.10\ m$, $e = 0.01\ m$, $\gamma_s = 1.5 \cdot 9810 = 14715\ N/m^3$ y $\gamma = 9810\ N/m^3$, se tiene:

- Peso del tapón: $1.5 \cdot 9810\pi 0.10^2 0.01 = 4.6229\ N$
- Peso sumergido del tapón: $(1.5 - 1.0)\, 9810\pi 0.10^2 0.01 = 1.541\ N$
- Peso del cilindro de agua por encima del tapón: $\pi 9810 \cdot 0.1^2\, (1.0 - 0.01) = 305.108\ N$
- Subpresión: $\pi 9810 \cdot 0.1^2 \cdot 1.0 = 308.190\ N$

Los valores de las fuerzas en las situaciones 1 y 2 planteada serán por tanto:

- Tapón apoyado en el fondo: $F_1 = 1.541\ N$
- Tapón sobre el desagüe: $F_2 = 4.6229 + 305.108 = 309.7309\ N$

Además debe destacarse que en el primer caso la fuerza (F_1) es independiente de la profundidad mientras que en el segundo (F_2) la fuerza aumenta proporcionalmente con ésta, con excepción del peso del tapón.

2.7.4 Equilibrio del sólido semisumergido

Un cuerpo sólido, con densidad superior a la atmosférica, que al meterlo en un fluido asciende hasta la superficie, queda flotando en equilibrio. En esa posición el empuje de Arquímedes debe igualar al peso del sólido, por tanto el volumen sumergido, o **Volumen de carena** V_c será igual a:

$$V_c = \frac{P}{\gamma} \tag{2.85}$$

siendo:

P	Peso del sólido en el aire	(N)
γ	Peso específico del fluido	(N/m^3)

Al centro de gravedad del volumen de carena, se le denomina **Centro de carena (C)**, y por él pasa el vector con el empuje de Arquímedes.

Entre dos posiciones de equilibrio adyacentes, se tendrá que el volumen de carena en ambas debe ser igual. Por tanto, existirá un único centro de rotación instantáneo que permita pasar de la posición 1 a la 2 sin variar el volumen de carena. Este centro de rotación sobre el que gira el sólido se le denomina **Metacentro (M)**. En el metacentro es donde se cortan los vectores que contienen el empuje de Arquímedes, y es el punto donde se aplica éste.

El metacentro se corresponde, por tanto, con el centro de curvatura de la línea que une los dos centros de carena C - C'. A la superficie que une todos los posibles centros de carena se le denomina **Superficie de carena (S_c)**. Téngase en cuenta que los giros en el metacentro pueden realizarse en todas las direcciones del espacio.

Una forma intuitiva de comprender este cambio entre dos flotaciones adyacentes, es imaginando que el sólido se comporta como un péndulo colgado del metacentro.

A la superficie que resulta del corte del sólido por el plano formado por la superficie libre del fluido se le denomina **Plano de flotación (P_f)**.

La envolvente de todos los posibles planos de flotación en las distintas posiciones en equilibrio se le llama **Superficie de flotación (S_f)**, y será tangente a cada plano de flotación en un único punto (g) que coincide con el centro de gravedad del plano de flotación como se demuestra mediante el Primer Teorema de Euler.

Primer Teorema de Euler

Supongamos dos flotaciones adyacentes como la mostradas en la figura 2.12

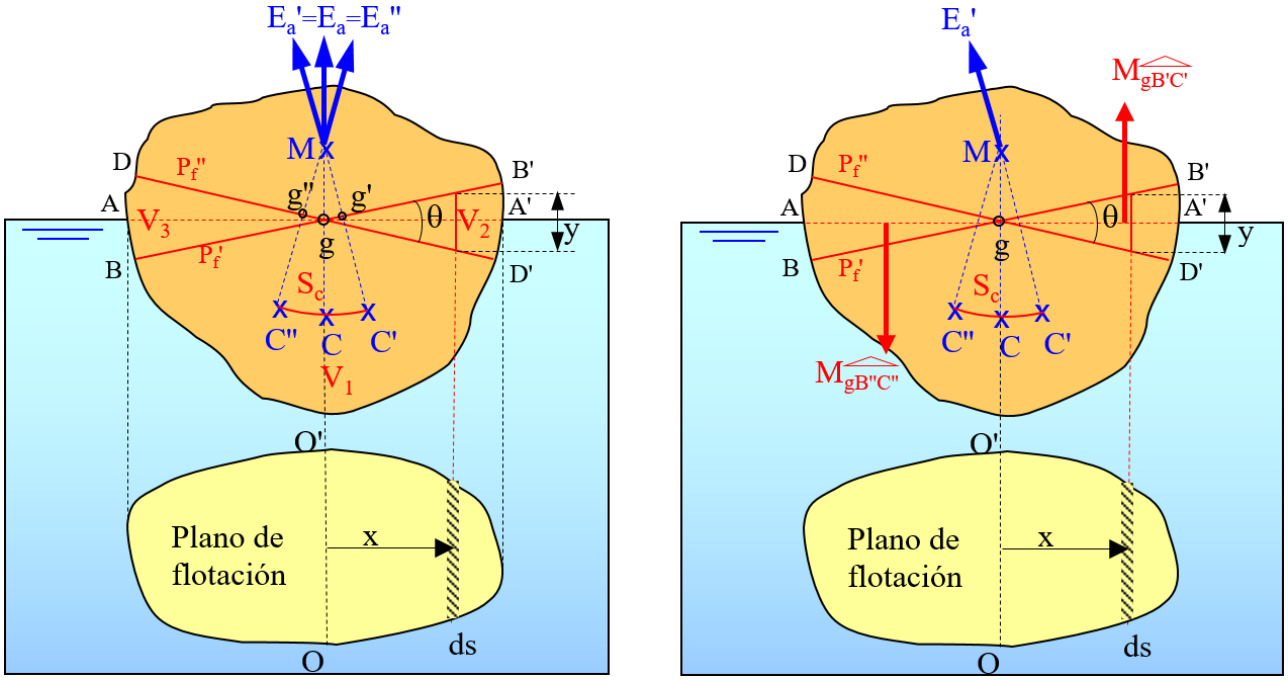


Figura 2.12: Demostración de los teoremas de Euler

Si ambas son flotaciones estables, el volumen sumergido, o volumen de carena V_c, debe ser el mismo en ambos casos:

$$\left.\begin{aligned} V_c &= V_1 + V_2 \\ V_c &= V_1 + V_3 \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow V_2 = V_3 \tag{2.86}$$

Por lo tanto $V_1 - V_2 = 0$. Desarrollando los volúmenes, y teniendo en cuenta que $y = \theta x$ se tiene:

$$V_2 - V_3 = \int_O^{A'} y\,ds - \int_O^{A} y\,ds = \int_A^{O} y\,ds + \int_0^{A'} y\,ds = \theta \int_A^{A'} x\,ds = 0 \tag{2.87}$$

Teniendo en cuenta la expresión del momento de primer orden o momento estático para determinar la posición del centro de gravedad de una superficie respecto de un eje dado:

$$M_e = \int_s x\, ds = S\, x_{cdg} \tag{2.88}$$

siendo x la distancia del eje a cada elemento diferencial de superficie. Sustituyendo esta expresión en (2.87) se tiene:

$$V_2 - V_3 = \theta x_{cdg} S_f = 0 \tag{2.89}$$

siendo:

x_{cdg}	Distancia desde el eje OO' al centro de gravedad	(m)
S_f	Superficie del plano de flotación considerado	(m^2)

Para que se satisfaga la igualdad dada en la ecuación (2.89), se tiene que cumplir que $x_{cdg} = 0$, lo que demuestra que el centro de gravedad se encuentra sobre el eje OO'.

Realizando este mismo razonamiento para dos flotaciones adyacentes girando sobre otro eje distinto de flotación, se llega a que el punto g es el corte de ambos ejes y coincide con el centro de gravedad del plano de flotación.

Esto implica que la superficie de flotación es convexa, ya que en caso contrario existirían dos centros de gravedad (g) en un mismo plano de flotación, lo que no es posible.

Ténganse en cuenta que en el caso de que un plano de flotación esté constituido por dos superficies separadas (ej: la flotación de un catamarán), el centro de gravedad (g) puede caer fuera de las dos superficies.

Flotación estable de un cuerpo semisumergido

Un cuerpo semisumergido tiene una flotación estable cuando:

- Su peso es igual al peso del volumen del líquido desalojado.
- Su centro de gravedad y su centro de carena están alineados en la misma vertical.
- El metacentro se encuentra situado por encima del centro de gravedad.

Para definir matemáticamente la flotación estable únicamente falta definir la posición del metacentro (M) para ello, se utiliza el segundo teorema de Euler.

Segundo Teorema de Euler

Supongamos dos flotaciones estables próximas, representadas en la figura 2.12 por los planos BB' y DD'. Se ha definido el metacentro como el eje de rotación entre ambas flotaciones. Por tanto, el punto M coincidirá con el centro de curvatura de la superficie de carena S_c formada por la curva $C''CC'$.

Si estudiamos los momentos en C'' originados por la variación de fuerzas debidas al cambio de flotación entre los planos de flotación P'_f y P''_f, se tiene que $\overline{C''C'} \cdot E'_a$ es igual al momento generado por las cuñas $\widehat{gC'B'}$ y $\widehat{gC''B''}$.

$$\overline{C''C'} \cdot E'_a = M_{\widehat{gC'B'}} + M_{\widehat{gC''B''}} \tag{2.90}$$

Los momentos se pueden determinar mediante:

$$M_{\widehat{gC'B'}} + M_{\widehat{gC''B''}} = \int_O^{A'} \gamma x\, y\, ds + \int_O^{A} \gamma x\, y\, ds = \theta\, \gamma \int_{A'}^{A} x^2\, ds = 0 \tag{2.91}$$

De manera similar, al caso anterior, el momento estático de segundo orden, o momento de inercia del plano de flotación respecto del eje OO' es:

$$I_{OO'} = \int_s x^2 ds \tag{2.92}$$

por lo que la ecuación 2.91 se puede escribir:

$$M_{\widehat{gC'B'}} + M_{\widehat{gC''B''}} = \theta\, \gamma I_{OO'} \tag{2.93}$$

La distancia $\overline{C''C'}$ puede expresarse en función de la distancia $\overline{MC}$ y el ángulo θ de giro entre ambos planos de flotación, mediante:

$$\overline{C''C'} = \theta \overline{MC} \tag{2.94}$$

Uniendo las ecuaciones (2.90), (2.93) y (2.94), se tiene:

$$\theta \overline{MC} \cdot E'_a = \theta\, \gamma I_{OO'} \qquad \longrightarrow \qquad \overline{MC} = \frac{\gamma I_{OO'}}{E'_a} = \frac{I_{OO'}}{V_c} \tag{2.95}$$

Lo que permite determinar la posición del metacentro (M) una vez conocida la posición del centro de carena (C), pudiendo entonces comprobarse que el centro de gravedad esté por debajo del metacentro, lo que es condición indispensable para que la flotación sea estable. En caso contrario, el sólido girará para buscar una nueva situación de flotación en equilibrio.

Brazo estabilizador

El brazo estabilizador (δ) se corresponde con la distancia existente entre el metacentro (M) y el cdg del sólido en flotación (G), siendo positiva cuando el metacentro se encuentra por encima del cdg y negativa en caso contrario.

En un sólido en flotación las únicas fuerzas actuantes son el peso y el empuje de Arquímedes. Ambas son verticales, y deberán estar alineadas para verificar el equilibrio. Cualquier desplazamiento de una de ellas sobre la recta vertical que une a ambas genera un momento que las devuelve a su posición de equilibrio. En caso de situarse G por encima de M este momento produce un vuelco del sistema de fuerzas.

Las *'Recomendaciones de Obras Marítimas'* (ROM) son las normas utilizadas en nuestro país para la construcción de obras marítimas. En el caso de diques y muelles formados por estructuras de cajones verticales, la ROM recomienda un brazo estabilizador mínimo de 0.5 m para el transporte por flotación de este tipo de estructuras.

Ejemplo

Flotación de una barcaza

Una barcaza para el transporte de agua tiene dimensiones de 50x15x6 metros con un espesor de paredes de 0.5 m. Su masa total es de 1300 t y su c.d.g. se encuentra a 1.70 m por encima del fondo. Determine la posición del centro de carena, del metacentro y el brazo estabilizador. Tómese $g = 9.81$ m/s^2 y una densidad relativa del agua del mar de $\gamma'_w = 1.025$

Para que haya flotación se tiene que cumplir que el peso (P) iguale al empuje de Arquímedes ($E_a = \gamma V_c$), siendo γ_w el peso específico del agua del mar y V_c el volumen de carena dado por:

$$V_c = 50 \cdot 15 \cdot h = \frac{P}{\gamma_w} = \frac{1300 \cdot 1000 \cdot 9.81}{1025 \cdot 9.81} = 1268.29\,\mathrm{m}^3 \qquad \rightarrow \qquad h = 1.691\,\mathrm{m} \tag{2.96}$$

siendo $h = 1.691$ $m < 6$ m la altura sumergida del fuste. Además de que el fuste no esté sumergido es necesario comprobar que el metacentro (M) se sitúe por encima del centro de gravedad ($G = 1.7$ m). Para ello se calcula la posición del centro de carena (C) desde el fondo de la barcaza como:

$$\overline{OC} = \frac{h}{2} = 0.8455\,\mathrm{m} \tag{2.97}$$

A continuación se determina la posición el radio metacéntrico dado por:

$$\overline{CM} = \frac{I_{AA}}{V_c} = \frac{\frac{1}{12}50 \cdot 15^3}{1268.29} = \frac{14062.5}{1268.29} = 11.0877\,\mathrm{m} \tag{2.98}$$

Obsérvese que la inercia elegida se corresponde con el eje de giro que daría una menor elevación del metacentro respecto del punto de carena. Este último sería común en ambas rotaciones, no así el metacentro. Por tanto, debe elegirse el metacentro más bajo para asegurarse que estamos en la situación más inestable.

Como $\overline{OM} = \overline{OC} + \overline{CM} = 11.93$ $m < \overline{OG} = 1.70$ m la flotación es estable.

El brazo estabilizador se determina finalmente como:

$$\delta = \overline{OC} + \overline{CM} - \overline{OG} = 10.23\,\mathrm{m} \tag{2.99}$$

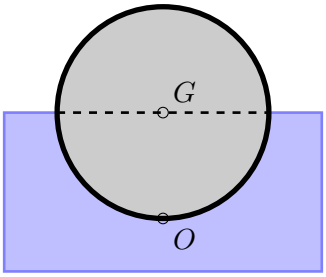
Indicatriz de Dupín

Mediante la indicatriz de Dupín se demuestra que las superficie de flotación (S_f) y la superficie de carena (S_c) son paralelas. La demostración es puramente geométrica y no se va a llevar a cabo en detalle.

Por tanto, si la superficie de flotación no puede ser cóncava, tampoco lo será la superficie de carena.

Ejercicio 5

En el cilindro de altura $h = 2.5\ m$ y radio $r = 2.0\ m$, que se muestra en la figura flotando en la posición indicada obtenga la expresión de la distancia del centro de gravedad al centro de carena ($\overline{GC}$) de un cilindro de altura h y radio r que se encuentra flotando sumergido hasta la mitad



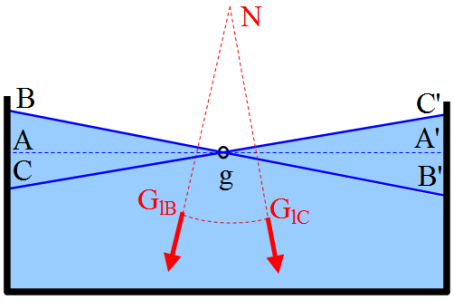
Test.

1. Aplíquelo al caso de $h = 2.5\ m$ y $r = 2.0\ m$. $\overline{GC} =$ Ans m

2.7.5 Equilibrio del sólido semisumergido con lastre líquido en su interior

Un caso diferenciado del anterior es la existencia de sólidos flotando con líquidos en su interior, como pueden ser los barcos de transporte de líquidos (ej: petroleros), donde el movimiento de la masa del líquido interior, produce un desequilibrio que debe ser tenido en cuenta en el cálculo de la flotación.

El liquido en el interior del recipiente mantiene su superficie libre perpendicular a la dirección de la aceleración de la gravedad. Igual que ocurre con el sólido flotando, donde el empuje de Arquímedes (E_a) se aplica sobre el metacentro (M), por ser éste el centro de rotación instantáneo del movimiento, cuando movemos la masa líquida en el interior de un recipiente, tenemos un punto (N) que hace esta función.



Aplicando el primer Teorema de Euler, explicado en la sección 2.7.4, al volumen encerrado bajo la superficie ($\overline{AA'}$) se demuestra que el punto g es el centro de gravedad de la superficie libre y mediante el segundo Teorema de Euler (sección 2.7.4), se demuestra que la distancia $\overline{NG_l}$, siendo G_l el centro de gravedad del líquido confinado es:

$$\overline{NG_l} = \frac{I_{AA'}}{V_l} \tag{2.100}$$

Esto implica que el peso de un volumen líquido confinado en un recipiente con superficie libre, debe aplicarse en el punto N.

La inercia considerada $I_{AA'}$ está referida al eje de giro de la oscilación que pasa por el centro de la superficie libre de la masa líquida estudiada. Para cada una de las masas líquidas interiores con superficie libre independiente se tendrá unos nuevos ejes de giro e inercia, en función del tamaño de la superficie libre respecto de este eje. Todos los ejes de giro serán paralelos entre sí para una misma oscilación del sistema.

Si seguimos manteniendo el criterio de que las fuerzas deben aplicarse sobre el centro de rotación instantáneo, cada uno de los volúmenes líquidos interiores con superficie libre independiente (i) tendrá un punto N_i donde se aplica el peso del volumen de líquido. El centro de gravedad de todas las masas se obtiene mediante la suma de los productos de los pesos actuantes por sus puntos de aplicación respectivos, dividido por la suma total de masas. Es decir:

$$\overline{OG_T} = \frac{\sum_{j=1}^{m} \overline{OG_{Sj}} P_j + \sum_{i=1}^{n} \overline{ON_i} P_i}{P_i + P_j} \tag{2.101}$$

siendo:

$\overline{OG_T}$	Distancia del plano horizontal de referencia O al centro de actuación todas las masas G_T
$\overline{OG_{Sj}}$	Distancia del plano horizontal de referencia O al centro de gravedad (G_S) de la masa sólida j
$\overline{ON_i}$	Distancia del plano horizontal de referencia O al punto de aplicación de la carga dada por la masa líquida i
P_j	Peso de la masa sólida j
P_i	Peso de la masa líquida i
$j = 1, \ldots, m$	Número de masas sólidas consideradas para el cálculo
$i = 1, \ldots, n$	Número de masas líquidas interiores con superficie libre independiente

Es muy importante tener en cuenta que para un mismo volumen de liquido transportado, la división de éste en compartimientos separados dará lugar a que la suma de las inercias de todos ellos sea mucho menor que la inercia de un compartimento único. Ello provoca una elevación menor del punto N donde se aplican los pesos del conjunto de las masas líquidas, aumentando por tanto la distancia final entre el metacentro (M) y el cdg conjunto de la masas líquidas y la barcaza que los contiene (G_T). Esta distancia $\overline{MG_T}$ es el brazo estabilizador δ resultante. Cuanto mayor sea la distancia $\overline{MG_T}$, siempre con M por encima de G_T, mayor es la estabilidad con la que navegará nuestra barcaza.

Ejemplo

Flotación de una barcaza con lastre líquido interior

En la barcaza del ejemplo anterior, suponga un relleno interior de agua de mar de 4 m, y determine la posición del centro de carena, del metacentro y el brazo estabilizador.

Al existir un mayor peso formado por la parte sólida (P_s) más los lastres líquidos (P_i), la barcaza navegará más sumergida y necesitará un mayor volumen de carena dado por:

$$V_c = 50 \cdot 15 \cdot h = \frac{P_s + P_l}{\gamma} = \frac{1300 \cdot 1000 \cdot 9.81 + 14 \cdot 49 \cdot 4 \cdot 1025 \cdot 9.81}{1025 \cdot 9.81} = \frac{1300}{1.025} + 14 \cdot 49 \cdot 4$$
$$= 1268.3 + 2744 = 4012.3\,\mathrm{m}^3 \qquad \rightarrow \qquad h = \frac{4012.3}{750} = 5.35\,\mathrm{m} \tag{2.102}$$

siendo $h = 5.35\ m < 6\ m$ la altura sumergida del fuste. Además de que el fuste no esté sumergido es necesario comprobar que el metacentro (M) se sitúe por encima del centro de gravedad de la barcaza $(G = 1.7\ m)$ más el punto de aplicación de las cargas debidas a las masas líquidas interiores (N). Para

ello se calcula la posición del centro de carena (C) desde el fondo de la barcaza como:

$$\overline{OC} = \frac{h}{2} = 2.675\,\text{m} \tag{2.103}$$

A continuación se determina la posición el radio metacéntrico dado por:

$$\overline{CM} = \frac{I_{AA}}{V_c} = \frac{\frac{1}{12}50 \cdot 15^3}{4012.3} = \frac{14062.5}{4012.3} = 3.505\,\text{m} \tag{2.104}$$

La inercia elegida, como en el caso anterior es la debida al eje paralelo a la eslora que pasa por el centro de la barcaza.

Como $\overline{OM} = \overline{OC} + \overline{CM} = 6.18\ m$

La masa líquida interior tiene de características:

- Area en planta del volumen líquido interior: $A_i = (50 - 2 \cdot 0.50)(15 - 2 \cdot 0.50) = 686\ m^2$
- Volumen líquido interior: $V_i = A_i \cdot h_i = 686 \cdot 4 = 2744\ m^3$
- Peso del agua interior: $P_i = V_i \cdot \gamma = 2744 \cdot 1025 \cdot 9.81 = 27591606\ N$
- Posición del cdg del agua interior respecto del fondo: $\overline{OG_i} = 0.50 + \frac{4}{2} = 2.5\ m$
- Inercia de la superficie libre interior respecto a eje eslora: $I_i = \frac{1}{12}49 \cdot 14^3 = 11204.67\ m^4$

La posición del punto de aplicación de las carga debida al relleno interior de agua es:

$$\overline{ON} = \overline{OG_i} + \frac{I_i}{V_i} = 2.5 + \frac{11204.67}{2744} = 6.5833\,\text{m} \tag{2.105}$$

El punto de aplicación de los pesos de la barcaza ($P_s = 1300 \cdot 1000 \cdot 9.81 = 12753000\ N$) más el agua interior ($P_i$) se calcula mediante:

$$\overline{OG_T} = \frac{\overline{OG}P_s + \overline{ON}P_i}{P_s + P_i} = 5.04\,\text{m} \tag{2.106}$$

El brazo estabilizador se determina finalmente como:

$$\delta = \overline{OM} - \overline{OG_T} = 1.14\,\text{m} \tag{2.107}$$

Ejemplo

Flotación de una barcaza con lastre líquido interior y separación con mamparas

En la barcaza del ejemplo anterior, suponga que el relleno interior de agua de mar esta separado en cuatro zonas en dirección manga mediante mamparos de peso y espesor despreciable

En este caso el peso del lastre interior de líquido sería el mismo, por lo que se obtendría igual valor la altura sumergida o calado (h) y del volumen de carena (V_c). La altura de aplicación del CDG de los lastres líquidos $\overline{OG_i} = 2.5\ m$ es la misma en los cuatro compartimentos.

La única variación se debe a la distancia existente entre el centro de gravedad de los lastres líquidos (G_i) y el centro de aplicación de cada uno de estos pesos (N_i)

$$\overline{G_iN_i} = \frac{I_i}{V_i} = \frac{\frac{1}{12}49\left(\frac{14}{4}\right)^3}{\frac{4012.3}{4}} = \frac{175.073}{1003.075} = 0.1745\,\text{m} \tag{2.108}$$

Finalmente el punto de aplicación de los pesos de la barcaza ($P_s = 12753000\ N$) más el agua interior ($4P_i = 27591606\ N$) se calcula mediante:

$$\overline{OG_T} = \frac{\overline{OG}P_s + \sum_{i=1}^{n}\overline{ON_i}P_i}{P_s + \sum_{i=1}^{4}P_i} = 2.145\,\text{m} \tag{2.109}$$

valor claramente inferior a los 5.04 m del caso anterior.

El brazo estabilizador resultante sería:

$$\delta = \overline{OM} - \overline{OG_T} = 6.18 - 2.145 = 4.035\,\text{m} \tag{2.110}$$

mejorando el 1.14 m del caso anterior.

Este comportamiento explica la división en compartimentos que se realiza en los buques de transporte de graneles líquidos.

Hidrodinámica

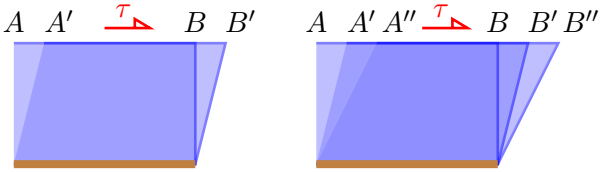
III

3.1 Introducción

La **Hidrodinámica** es la parte de la mecánica que estudia el comportamiento de los fluidos (líquidos y gases).

En un sólido, la deformación se mantiene mientras se siga aplicando la fuerza que la produce. El equilibrio se produce entre al fuerza aplicada y la deformación producida.

Deformación del sólido rígido: La deformación se mantiene constante mientras actúa la fuerza



Deformación del fluido: La deformación aumenta mientras se mantiene el movimiento

Figura 3.1: Deformación de un sólido rígido y un fluido

En un fluido, se produce deformación cuando existe movimiento. Este es el responsable de producir el esfuerzo cortante que provoca la deformación de la partícula. En este caso, se establece un **equilibrio dinámico** entre la velocidad de deformación y el esfuerzo cortante.

Las fuerzas actuantes en la mecánica de fluidos en movimiento son:

- Gravedad
- Presión
- Fuerzas viscosas: Producen esfuerzo cortante en las partículas debido a la diferencia de velocidad relativa entre ellas
- Fuerzas inerciales: Se encuentran asociadas a la masa en movimiento

De ellas, las dos primeras ya existían en la hidrostática, añadiéndose las dos últimas con el movimiento.

3.2 Clasificación de la mecánica de fluidos

3.2.1 Respecto del método de cálculo

- Analítica: Basada en el desarrollo de la formulación teórica.
- Experimental: Basada en el análisis sistemático de resultados y experiencias de laboratorio.
- Computacional: Basadas en el uso de ordenadores para resolver las ecuaciones en diferencias finitas del movimiento euleriano, o del enfoque lagrangiano (método de las partículas).

3.2.2 Respecto de la forma de cálculo

Coordenadas Eulerianas

Planteamiento debido a Euler (1707-1783) que estudia un punto o un volumen fijo en el espacio. Las ecuaciones expresan los cambios de masa, cantidad de movimiento o energía en el volumen o punto de control.

Las ecuaciones son de la forma:

$$\overrightarrow{v} = v\left(x, y, z, t\right) \tag{3.1}$$

siendo $\overrightarrow{x} = (x, y, z)$ el punto en el espacio y t el tiempo.

Coordenadas Lagrangianas

Planteamiento debido a Lagrange (1736-1813) que estudia la trayectoria y deformación de cada partícula a lo largo del tiempo. Este planteamiento es el más habitual en sólidos. En los fluidos se requiere una gran capacidad de cálculo por lo que esta aproximación no es la habitual. Sin embargo, en los últimos años y debido a la mejora informática, existen numerosos modelos numéricos con esta aproximación. En general se denominan modelos de partículas, con o sin malla, y ofrecen interesantes posibilidades para abordar problemas complejos difícilmente abordables por formulación euleriana. Estos están generalmente asociados con las condiciones de contorno que modifican mucho los problemas, como la interacción de las partículas con sólidos, arrastre de material sólido que se puede abordar de forma discreta, turbulencia, etc. En cualquier caso, se requiere todavía un elevado tiempo de computación, muchas partículas, y un mejor ajuste de estos modelos a problemas conjuntos de turbulencia y/o tensión superficial, especialmente cuando existe más de un fluido en acción (por ejemplo agua y aire).

Las ecuaciones son de la forma:

$$\overrightarrow{v} = v\left(r_x, r_y, r_z, t\right) \tag{3.2}$$

siendo $\overrightarrow{r} = (r_x, r_y, r_z)$ las coordenadas de la partícula que se estudia y t el tiempo.

Definiciones

Si se considera la velocidad como $\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt}$ se puede definir:

- Variación espacial: Variación de la velocidad de un punto a otro del espacio para un mismo instante de tiempo.
- Variación temporal: Variación de la velocidad en un punto de un instante al siguiente.

Por tanto, podemos expresar la velocidad como:

$$\overrightarrow{v} = f\,(r, t) \tag{3.3}$$

En función de los siguientes casos:

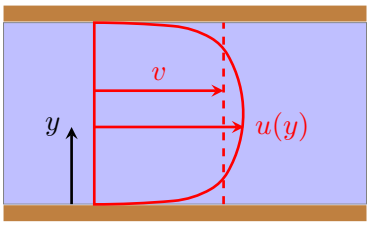
- $r = constante$, $t = variable$ → Se conoce v en un punto en todos los instantes.
- $r = variable$, $t = constante$ → Se conoce v en todos los puntos en un instante.
- $r = variable$, $t = variable$ → Se conoce v en todos los puntos en todos los instantes.

Velocidad instantánea en un punto (u): Es la velocidad de una partícula que pasa por ese punto en el instante considerado.

Velocidad media en un punto ($\overrightarrow{u}$): Es la velocidad media en el punto de las velocidades instantáneas medidas en ese punto.

Velocidad media en una sección S (v): Valor medio, en el espacio, de las velocidades en todos los puntos de la sección.

$$v = \frac{\int_S u ds}{S} \tag{3.4}$$



3.2.3 Respecto del tipo de movimiento

- Por su variación en el tiempo:
  - Régimen permanente: La velocidad es la misma en cada punto en todos los instantes. Puede variar de un punto a otro.
  - Régimen variable: En un punto, la velocidad no es constante en el tiempo.
- Por su variación en el espacio:
  - Régimen uniforme: En un instante, la velocidad es la misma a lo largo de una línea de corriente.

  - Régimen variado: En un instante, la velocidad es distinta a lo largo de una misma línea de corriente.

- Por el tipo de régimen:
  - Laminar: Las partículas se mueven según trayectorias cuasiparalelas.
  - Turbulento: El movimiento es desordenado con una dirección predominante de avance.
- Por la rotación de la partícula:
  - Rotacional: La partícula gira alrededor de si misma.
  - Irrotacional: No se produce ese giro. Esto es imposible en fluidos reales.

Definiciones

Línea de corriente: Línea envolvente de los vectores velocidad en un instante determinado.

Trayectoria: Curva que recorre una partícula a lo largo del tiempo.

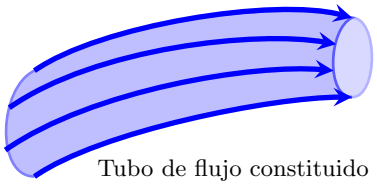
Línea de traza: Trayectoria de las partículas que pasan por un punto fijo. Es un concepto de laboratorio.

Nota

En régimen permanente las líneas de corriente, traza y trayectoria son coincidentes

3.2.4 Propiedades de las líneas de corriente

- En un instante de tiempo solo pasa una única línea de corriente por un punto. Esto implica que las líneas de corriente no se pueden cortar.
- Un haz de líneas de corriente apoyadas unas en otras es impenetrable. Esto constituye un **tubo de flujo**.
- La velocidad en los puntos del contorno es tangente al mismo. En el caso particular de movimiento plano, el contorno es una línea de corriente.



Tubo de flujo constituido por líneas de corriente formando un contorno cerrado

Los contornos influyen en la forma que adopta el fluido. Esos pueden ser:

- Contornos fijos: Son aquellos que permanecen invariables en el tiempo. Por ejemplo las paredes de una tubería.
- Contornos móviles: Son los que varían con el tiempo. Por ejemplo, los álabes de una bomba.
- Superficie libre: Es el contorno que tiene una presión igual a ambos lados.

En los dos primeros, la velocidad en cada instante de tiempo es tangente al contorno. No así en la superficie libre, donde puede ser perpendicular al mismo, produciendo deformación en ese sentido, como ocurre con las olas del mar.

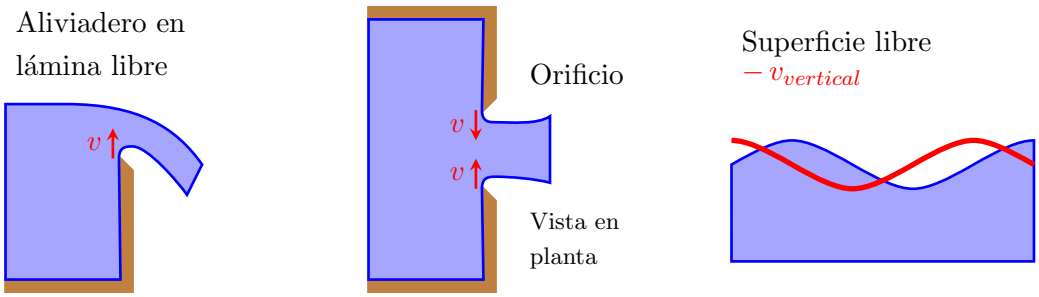


Figura 3.2: Contornos rígidos y superficie libre

3.3 Aceleración

Si se define la aceleración como en la mecánica clásica:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{3.5}$$

y se tiene en cuenta que la velocidad puede expresarse en función del versor tangente ($\vec{\tau}$) como:

$$\vec{v} = v\vec{\tau} \tag{3.6}$$

se llega a:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} \tag{3.7}$$

siendo s la trayectoria seguida por la partícula.

Considerando que $\frac{ds}{dt} = v$ y que con el tiedro de Frenet, se tiene que $\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{\vec{n}}{R_c}$ siendo $\vec{n}$ el versor normal y R_c el radio de curvatura, se obtiene:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R_c}\vec{n} \tag{3.8}$$

Es decir, la aceleración se puede descomponer en una componente tangencial $\left(\frac{dv}{dt}\vec{\tau}\right)$ y otra normal $\left(\frac{v^2}{R_c}\vec{n}\right)$. Esto implica que un movimiento curvo con velocidad constante tiene aceleración.

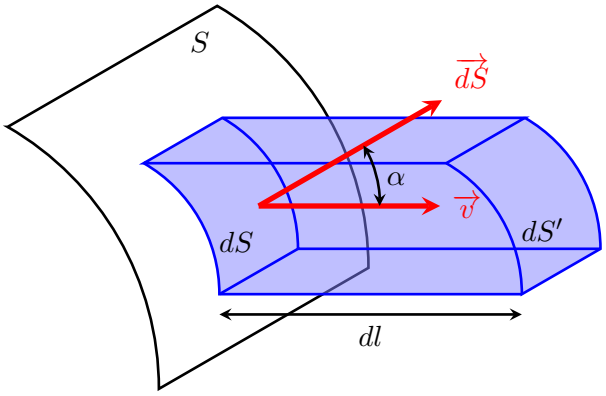
3.4 Caudal

Se define el **Caudal medio** como el volumen ΔV que atraviesa la sección S por unidad de tiempo Δt

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} \tag{3.9}$$

El **Caudal instantáneo** se corresponde con el caudal medio en un instante infinitesimal de tiempo:

$$Q_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt} \tag{3.10}$$



Si en una superficie S consideramos un elemento diferencial (dS), y se estudia el fluido que atraviesa esta superficie en un intervalo de tiempo dt, se comprueba que las partículas que en $t = 0$ atravesaban el dS estarán formando una nueva superficie dada por dS' en el tiempo $t = dt$.

La distancia recorrida en ese intervalo de tiempo por las partículas de fluido será:

$$dl = |\overrightarrow{v}|dt \tag{3.11}$$

Por tanto, el prisma dV representa el volumen de fluido que ha atravesado la superficie dS en el intervalo de tiempo dt. Este puede expresarse:

$$dV = dS\, dl\, cos\alpha = dScos\alpha|\overrightarrow{v}|dt = d\overrightarrow{S} \odot \overrightarrow{v}dt \tag{3.12}$$

siendo:

$d\overrightarrow{S}$	Vector normal a la superficie de modulo dS
$dScos\alpha$	Proyección de la superficie dS sobre la normal a la velocidad
$\odot$	Producto escalar de vectores

En este caso, el caudal instantáneo puede expresarse:

$$Q_i = dQ = \frac{dV}{dt} = \overrightarrow{dS} \odot \overrightarrow{v} \tag{3.13}$$

Integrando este caudal para toda la superficie S:

$$Q = \int_S \overrightarrow{dS} \odot \overrightarrow{v} \tag{3.14}$$

que puede interpretarse como que *'El caudal fluido que pasa por una superficie S, es el flujo del vector velocidad a través de dicha superficie'*

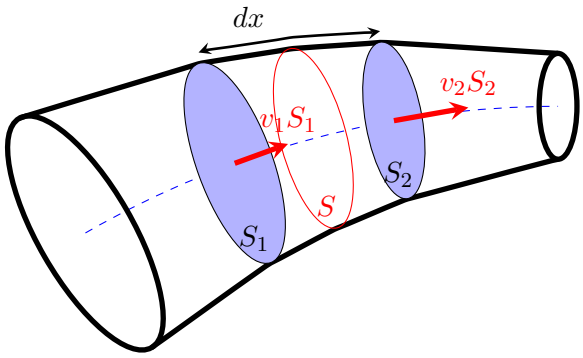
Cuando la superficie es perpendicular a la velocidad en cada uno de los puntos, se cumple:

$$Q = \int_S \overrightarrow{dS} \odot \overrightarrow{v} = \int_S udS = vS \tag{3.15}$$

es decir, el caudal es igual a la velocidad media en la sección multiplicada por la sección.

3.5 Ecuación de conservación de la cantidad de masa

En un recinto cerrado formado por un tubo de flujo, la masa que entra en un instante de tiempo menos la que sale es igual a la masa fluida almacenada en su interior.
Considerando las superficies S_1 y S_2, separadas un dx y perpendiculares al eje del tubo, el volumen fluido contenido entre ambas (dV), será:



$$dV = S dx \tag{3.16}$$

Tomando S como la superficie media entre ambas, se puede definir, para ese volumen:

- Caudal entrante: $Q_1 = v_1 S_1$
- Caudal saliente: $Q_2 = v_2 S_2$

Considerando un dt, se tiene que la masa almacenada en el volumen en el tiempo t se corresponde con:

$$dm|_t = \rho\, dV = \rho\, S\, dx \tag{3.17}$$

y en el tiempo $t + dt$:

$$dm|_{t+dt} = \rho\, S\, dx + \frac{\partial\,(\rho\, S)}{\partial t} dt\, dx \tag{3.18}$$

lo que implica un incremento de:

$$dm|_{t+dt} - dm|_t = \frac{\partial\,(\rho\, S)}{\partial t} dt\, dx \tag{3.19}$$

en el intervalo de tiempo diferencial considerado.

Estudiando ahora el flujo másico que entra y sale a través de las superficies S_1 y S_2, se tiene:

$$dm = \rho\, dV = \rho\, S\, dx = \rho\, v\, S\, dt = \rho\, Q\, dt \tag{3.20}$$

- Masa entrante en S_1: $dm_1 = \rho_1 Q_1 dt = \rho_1 v_1 S_1 dt$
- Masa saliente en S_2: $dm_2 = \rho_2 Q_2 dt = \rho_2 v_2 S_2 dt = \rho_1 v_1 S_1 dt + \frac{\partial(\rho\, v\, S)}{\partial x} dx\, dt$

El aumento de masa contenida en el volumen de control, en ese mismo dt, en este caso vendrá dado por:

$$dm_1 - dm_2 = \rho_1 v_1 S_1 dt - \rho_2 v_2 S_2 dt = -\frac{\partial\,(\rho\, v\, S)}{\partial x} dx\, dt \tag{3.21}$$

que, por el principio de conservación de la masa, debe corresponderse con el incremento de masa almacenada en el volumen de control en el instante de tiempo dt. Por tanto:

$$-\frac{\partial\,(\rho\, v\, S)}{\partial x} dx\, dt = \frac{\partial\,(\rho\, S)}{\partial t} dt\, dx \qquad \longrightarrow \qquad \frac{\partial\,(\rho\, S)}{\partial t} + \frac{\partial\,(\rho\, v\, S)}{\partial x} = 0 \tag{3.22}$$

que es la denominada **ecuación de conservación de la masa**. A esta ecuación también se la conoce como ecuación de continuidad en un conducto.

3.5.1 Casos particulares de la ecuación de conservación de la masa

Movimiento permanente

En este caso, no hay variación en el tiempo ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$). Por tanto, ($\frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \rightarrow Q = \text{cte}$ en el tiempo), lo que implica que:

$$\frac{\partial (\rho\, v\, S)}{\partial x} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \rho\, v\, S = \text{cte en el espacio} \tag{3.23}$$

Esto puede enunciarse como, *'la masa fluida que atraviesa la sección por unidad de tiempo es constante'*

Fluido incompresible

Cuando el fluido es incompresible, la densidad permanece constante ($\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \rightarrow \rho = \text{cte}$), reduciéndose la ecuación (3.22) a:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial (v\, S)}{\partial x} = 0 \tag{3.24}$$

Fluido incompresible y tubo indeformable

Si, adicionalmente se considera que el tubo es indeformable ($\frac{\partial S}{\partial t} = 0$), se llega a:

$$\frac{\partial (v\, S)}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad v\, S = Q = \text{cte en el espacio} \tag{3.25}$$

lo que implica que el caudal es constante en x en un mismo instante de tiempo, pudiendo ser diferente para otro tiempo considerado.

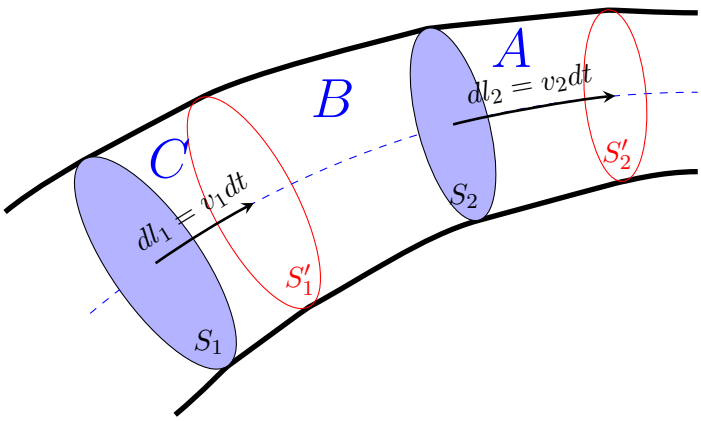
Movimiento permanente del fluido incompresible y tubería indeformable

Si se considera un fluido incompresible ($\rho = \text{cte}$) en movimiento permanente ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$), entonces se tiene que el caudal es constante en el tiempo t y en el espacio x $\left(\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 0\right)$.

3.6 Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

La ecuación de conservación de la cantidad de movimiento se deduce al igualar las fuerzas internas debidas a la variación de la cantidad de movimiento en un volumen de control en un diferencial de tiempo con las fuerzas externas actuantes. Es decir:

$$\overrightarrow{F_{int}} = \frac{\partial (mv)}{\partial t} = \overrightarrow{F_{ext}} \tag{3.26}$$



En primer lugar se estudian las **fuerzas internas** que se producen en el volumen de control debido a la variación de la cantidad de movimiento.

Igual que se ha hecho para deducir a ecuación de conservación de la masa, se considera un volumen de control en el interior de un tubo de flujo, pero con la diferencia de que en este caso las secciones S_1 y S_2 no están infinitamente próximas, en el tiempo $t + dt$, las partículas que atravesaron las secciones S_1 y S_2 en t se encontrarán en S_1' y S_2' respectivamente.

La masa m asociada al volumen V que atraviesa una sección S en el diferencial de tiempo dt viene dada por:

$$m = \rho V = \rho S v dt \tag{3.27}$$

Volviendo a la ecuación (3.26) y considerando la variación de la cantidad de movimiento como la cantidad de movimiento ganada en el volumen A más la perdida en C y más la variación sufrida en el volumen B se llega a:

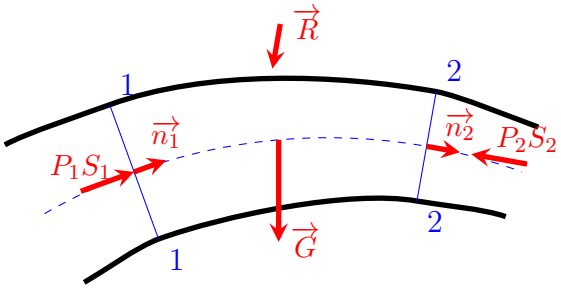
$$\overrightarrow{F_{int}} = \frac{dm_2 \overrightarrow{v_2}}{dt} - \frac{dm_1 \overrightarrow{v_1}}{dt} + \frac{dm_V \overrightarrow{v}}{dt} = \frac{\rho_2 (S_2 v_2 dt) \overrightarrow{v_2} - \rho_1 (S_1 v_1 dt) \overrightarrow{v_1} + \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV\right) \overrightarrow{v}\, dt}{dt} \tag{3.28}$$

Teniendo en cuenta que $Q = vS$ y simplificando:

$$\overrightarrow{F_{int}} = \rho_2 Q_2 \overrightarrow{v_2} - \rho_1 Q_1 \overrightarrow{v_1} + \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV\right) \overrightarrow{v} \tag{3.29}$$

Adicionalmente, sobre el volumen estarán actuando las siguientes **fuerzas externas**:

- Peso del fluido: $\overrightarrow{G}$
- Reacciones del contorno sobre el fluido incluyendo las fuerzas normales y las tangenciales ($\overrightarrow{\tau}$) en las paredes debidas a la viscosidad: $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{F_N} + \overrightarrow{F_\tau}$
- Presión en las secciones extremas: $PS\overrightarrow{n}$



donde $\overrightarrow{n}$ representa el versor perpendicular a la sección de actuación.

La resultante de todas estas fuerzas será:

$$\overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{G} + \overrightarrow{R} + P_1 S_1 \overrightarrow{n_1} - P_2 S_2 \overrightarrow{n_2} \tag{3.30}$$

Planteando el equilibrio entre las fuerzas internas (3.29) y externas (3.30) cuando el movimiento es permanente ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$), se obtiene:

$$\overrightarrow{G} + \overrightarrow{R} + P_1 S_1 \overrightarrow{n_1} - P_2 S_2 \overrightarrow{n_2} = \rho_2 Q_2 \overrightarrow{v_2} - \rho_1 Q_1 \overrightarrow{v_1} \tag{3.31}$$

Considerando que $\overrightarrow{v_i} = v_i \overrightarrow{n_i}$, se reagrupa convenientemente llegándose a:

$$\overrightarrow{G} + \overrightarrow{R} + (\rho_1 Q v_1 + P_1 S_1)\, \overrightarrow{n_1} - (\rho_2 Q v_2 + P_2 S_2)\, \overrightarrow{n_2} = 0 \tag{3.32}$$

Al término $\overrightarrow{N_i} = (\rho_i Q v_i + P_i S_i)\, \overrightarrow{n_i}$ se le conoce como **impulsión en la sección** i, y es una fuerza que se aplica hacia el interior del volumen.

Nota

En el caso de movimiento permanente, y solo en él, la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento se puede plantear como un equilibrio estático de fuerzas en el que la cantidad de movimiento se sustituye por impulsiones aplicadas hacia el interior del volumen.

3.6.1 Comentarios sobre la ecuación de cantidad de movimiento

La reacción $\overrightarrow{R}$ del contorno sobre el fluido tiene una componente normal al contorno y otra tangencial. La componente normal del fluido sobre la tubería producirá una deformación de esta fuera del plano de circulación por lo que los anclajes de la conducción en los codos deben ser diseñados para contrarrestar esta componente. La componente tangencial también hay que tenerla en cuenta en el diseño de los anclajes. Un planteamiento más riguroso de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento obligaría a integrar los valores de estas reacciones a lo largo del contorno de la tubería.

Asimismo, el sentido de $\overrightarrow{R}$ no depende del sentido de circulación del agua, sino de la fuerza necesaria para que una determinada cantidad de masa fluida modifique su dirección de circulación.

En conducciones a presión (tuberías), el valor del término PS de la impulsión suele ser muy superior al debido a $\rho Q v$.

En el caso de que la distribución de velocidades en la sección no sea uniforme el valor de la impulsión debe tomarse como:

$$N = \rho \int_S v^2 dS + \int_S P dS \tag{3.33}$$

Si utilizamos un coeficiente β dado por:

$$\beta = \frac{\int_S u^2 dS}{v^2 S} \tag{3.34}$$

y una presión media definida como:

$$\overline{P} = \frac{\int_S P dS}{S} \tag{3.35}$$

se puede expresar la impulsión como:

$$N = \rho\beta v^2 S + \overline{P}S \tag{3.36}$$

siendo v la velocidad media en la sección.

El valor de β es siempre mayor o igual a uno, dada la definición matemática de este coeficiente. El valor de $\beta = 1$ se obtiene para una distribución uniforme de velocidades en la sección, donde la velocidad en cada punto coincide con la media. Valores elevados de β indican pérdida de uniformidad. En el caso de régimen laminar, se puede demostrar que el valor de $\beta = 4/3$.

El valor medio de la presión ($\overline{P}$) coincide con la presión en el centro de la sección cuando la sección inundada es simétrica respecto del eje medio, como es el caso de las secciones circulares de tubería y los canales rectangulares. En el caso de las tuberías existe una pequeña variación de presión entre el punto más alto y más bajo debido al incremento de presión por la gravedad. Esta variación sí tiene importancia en conducciones en lámina libre (canales) donde la altura de la lámina libre puede tener varios metros de diferencia con respecto a la solera, siendo la presión relativa 0 en la superficie y máxima en el fondo. En la hidrostática ya se ha demostrado que para variaciones lineales de la presión con la profundidad, el valor de $\overline{P}S$ (empuje sobre la sección) coincide con el valor de la presión a la profundidad del cdg de la sección considerada multiplicada por la sección. No así su punto de aplicación que estará situado por debajo en el centro de presiones.

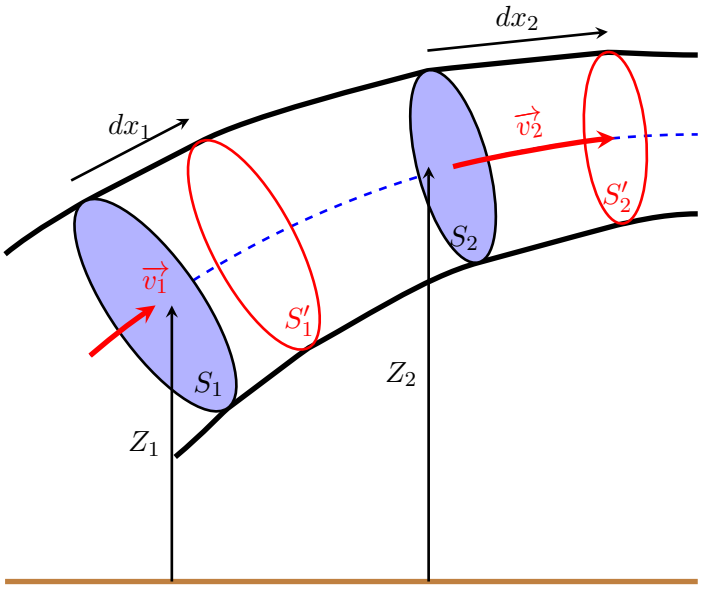
3.7 Ecuación de conservación de la energía

Estudiando la conservación del flujo de energía entre dos secciones del volumen de control frente al trabajo realizado por las fuerzas externas actuantes se deduce la ecuación de conservación de la energía.

$$\Delta E_{12} = \sum W_{F_{ext}} \tag{3.37}$$

El estudio se va a realizar bajo las hipótesis de:

- Régimen permanente $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$
- Fluido incompresible $(\rho = cte)$
- Pared indeformable $\left(\frac{\partial S}{\partial t} = 0\right)$



Para el estudio de la variación de energía, se van a considerar las variaciones de energía potencial (E_p) y cinética (E_c) entre las secciones de salida y entrada del volumen de control en el tiempo dt.

Durante ese intervalo de tiempo, las partículas que atravesaron la secciones 1 y 2 al inicio habrán avanzado hasta las secciones $1'$ y $2'$ respectivamente. Si consideramos las masas que entran (dm_1) y salen (dm_2) del volumen de control se tiene:

- Masa que entra: $dm_1 = \rho_1 dV_1 = \rho_1 S_1 dx_1$
- Masa que sale: $dm_2 = \rho_2 dV_2 = \rho_2 S_2 dx_2$

siendo:

ρ	Densidad del fluido	(kg/m^3)
S	Área de la sección atravesada	(m^2)
dV	Diferencial de volumen que entra (1) o sale (2) del volumen de control en el intervalo de tiempo considerado	(m^3)

Asumiendo las hipótesis anteriormente enunciadas de régimen permanente, fluido incompresible y pared indeformable y teniendo en cuenta la conservación de la masa, el diferencial de masa que entra (dm_1) es igual al diferencial de masa que sale (dm_2):

$$dm = dm_1 = dm_2 \tag{3.38}$$

La variación de energía entre las secciones 1 y 2 se estudia como:

- Variación de la energía potencial:

$$\left.\begin{array}{l} Ep_1 = dm_1 \cdot g \cdot Z_1 \\ Ep_2 = dm_2 \cdot g \cdot Z_2 \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \Delta Ep_{12} = Ep_2 - Ep_1 = g \cdot dm\,(Z_2 - Z_1) \tag{3.39}$$

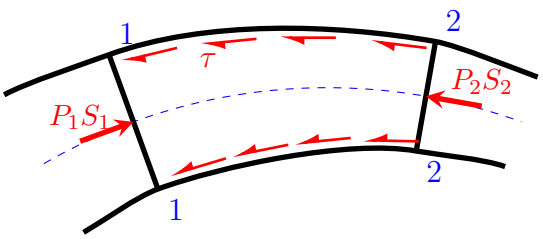
- Variación de la energía cinética:

$$\left.\begin{array}{l} Ec_1 = \frac{1}{2} dm_1 \cdot \alpha_1 \cdot v_1^2 \\ Ec_2 = \frac{1}{2} dm_2 \cdot \alpha_2 \cdot v_2^2 \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \Delta Ec_{12} = Ec_2 - Ec_1 = \frac{1}{2} dm\left(\alpha_2 v_2^2 - \alpha_1 v_1^2\right) \tag{3.40}$$

siendo, α el coeficiente de coriolis que se define en la ecuación 3.51.

El **trabajo de las fuerzas exteriores** se obtiene del producto de la fuerza aplicada por el desplazamiento que provoca.

$$W = F \cdot dx \tag{3.41}$$



Considerando las siguientes expresiones deducidas de la diferencia de masa en cada una de las secciones afectadas:

$$dm = \rho \cdot V = \rho \cdot S \cdot dx \quad \rightarrow \quad \left.\begin{array}{c} S \cdot dx = \frac{dm}{\rho} \\ dx = \frac{dm}{\rho \cdot S} \end{array}\right\} \tag{3.42}$$

Identificando cada una de las fuerzas actuantes:

- Trabajo de las fuerzas de presión:

$$Fp_1 = P_1 S_1 \quad \rightarrow \quad W_{Fp_1} = P_1 S_1 dx_1 = P_1 S_1 \frac{dm}{\rho} \tag{3.43}$$
$$Fp_2 = P_2 S_2 \quad \rightarrow \quad W_{Fp_2} = P_2 S_2 dx_2 = P_2 S_2 \frac{dm}{\rho}$$

$$W_{Fp} = W_{Fp_1} - W_{Fp_2} = \frac{dm}{\rho}(P_1 - P_2) \tag{3.44}$$

- Trabajo de las fuerzas tangenciales debidas al rozamiento del fluido con las paredes. Las fuerzas que se oponen al movimiento tienen signo negativo:

$$W_{F_\tau} = -\tau P_e L dx = -\tau P_e L \frac{dm}{\rho \cdot S} \tag{3.45}$$

siendo:

τ	Tensión tangencial en el contorno del volumen de control	(N/m^2)
$P_e \cdot L$	Superficie del volumen de control donde se produce el rozamiento (perímetro por longitud)	(m^2)
dx	Desplazamiento medio del fluido en el volumen de control $dx = \frac{dx_1+dx_2}{2}$	(m)
S	Superficie media del volumen de control $S = \frac{S_1+S_2}{2}$	(m)

Igualando la variación de energía al trabajo de las fuerzas externas:

$$g \cdot dm\,(Z_2 - Z_1) + \frac{1}{2} dm\left(\alpha_2 v_2^2 - \alpha_1 v_1^2\right) = \frac{dm}{\rho}(P_1 - P_2) - \tau P_e L \frac{dm}{\rho \cdot S} \tag{3.46}$$

Reagrupando los términos y dividiendo por el peso del diferencial de masa $(g \cdot dm)$, se llega a:

$$Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + \frac{\tau}{\gamma}\frac{P_e}{S} L \tag{3.47}$$

El término $\frac{P_e}{S} = \frac{1}{R_H}$ siendo R_H el radio hidráulico. Sustituyendo se obtiene la **Ecuación de conservación de la energía**:

$$Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + \frac{\tau}{\gamma R_H} L \tag{3.48}$$

En esta expresión cada uno de los términos representa, en el punto de medida:

Z	Término de energía potencial	(m)
$\frac{P}{\gamma}$	Término de energía de presión	(m)
$\alpha \frac{v^2}{2g}$	Término de energía cinética	(m)
$\frac{\tau}{\gamma R_H} L$	Pérdida de energía entre los puntos de medida debida al rozamiento del fluido con el contorno	(m)

El último término denominado **pérdida de carga continua** (ΔH_c) puede expresarse en función de una perdida por metro lineal (I), denominada **pendiente de pérdidas**, y la longitud entre los puntos.

$$\Delta H_c = I \cdot L \quad \text{con} \quad I = \frac{\tau}{\gamma R_H} \tag{3.49}$$

Esta expresión de la energía, habitualmente utilizada, tiene claramente definidos los tres términos expresados como metros de columna de fluido equivalente. Es decir, la energía ha pasado a expresarse en metros cuando se ha dividido por el peso del diferencial de masa.

En el movimiento de un fluido perfecto, donde no se produce pérdida de energía por rozamiento, el valor de la energía permanece constante. Esta simplificación se realiza habitualmente cuando la distancia entre las secciones consideradas es corta.

Cuando el fluido es agua, es habitual expresar esta energía en metros de columna de agua, utilizándose como unidad (m.c.a).

3.7.1 Comentarios al Trinomio de Bernoulli

Teniendo en cuenta las hipótesis realizadas para la el planteamiento de las ecuaciones cabe destacar que:

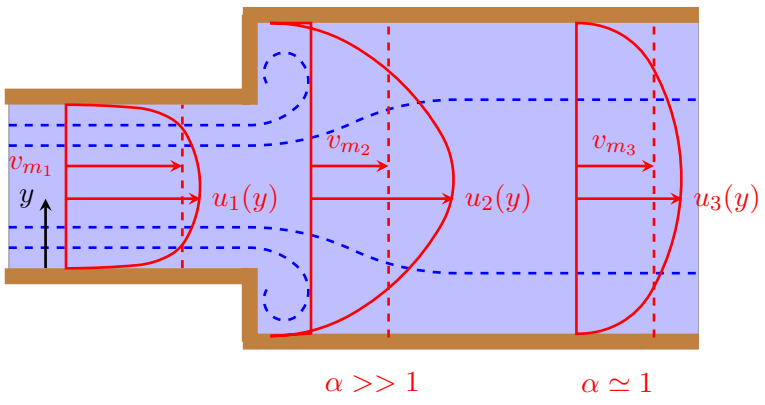
- Las líneas de corriente tienen que ser paralelas en las secciones consideradas para que pueda cumplirse que $-\int_1^2 dPdV = (P_1 - P_2)\,dV$ lo que es habitual en el trasporte a través de tuberías.
- En el caso de que las líneas de energía no puedan considerarse paralelas y la distribución de velocidades varíe mucho respecto de la media puede utilizarse una expresión dada por:

$$Z + \beta\frac{\overline{P}}{\gamma} + \alpha\frac{v^2}{2g} = \text{cte} \tag{3.50}$$

siendo α el coeficiente de coriolis que corrige esta variación de velocidades dentro de la sección dado en la ecuación 3.40:

$$\alpha = \frac{\int_S u^3 dS}{v^3 S} \tag{3.51}$$

En general, α es un valor muy cercano a la unidad, aunque siempre superior a esta, dada su definición matemática, pero que en algunos casos puede ser mucho mayor que 1. Estos casos suelen deberse a perturbaciones locales debidas a variaciones bruscas en la sección de circulación como válvulas, cambios bruscos de sección, salidas de depósitos etc. En todos ellos es difícil evaluar las velocidades en la sección y por tanto definir un valor para el coeficiente de coriolis.



3.7.2 Líneas de energía y piezométrica

La línea de energía es la cota en metros correspondiente a la energía que lleva el fluido en cada punto y refleja los tres términos del trinomio de Bernoulli.

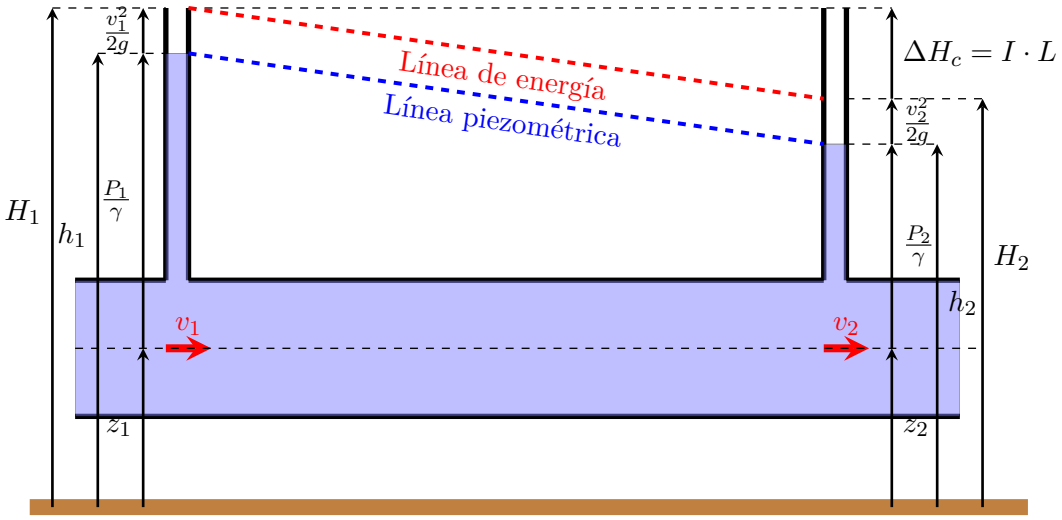


Figura 3.3: Líneas de energía y piezométrica

La línea piezométrica se corresponde con la altura que alcanzaría la superficie libre en la circulación. En una conducción en presión, en la que se realice un agujero perpendicular a la circulación del fluido y se sitúe un piezómetro, el líquido ascenderá hasta una altura igual al valor del término P/γ a través del piezómetro y tomando como referencia el eje de la tubería. Esta es la altura piezométrica (h) que será la suma de los términos $Z + \frac{P}{\gamma}$ del trinomio de Bernoulli.

$$h = Z + \frac{P}{\gamma} \tag{3.52}$$

En el caso mostrado en la figura 3.3, las líneas de energía y piezométrica resultan paralelas al haber considerado régimen permanente, sección constante e indeformable y fluido incompresible, lo que implica la igualdad de velocidades en ambas secciones al considerar la ecuación de conservación de la masa.

En el caso de circulación de flujo en lámina libre, como los canales, la altura de energía (H) dada por el trinomio de Bernoulli puede expresarse como:

$$H = Z + y + \alpha \frac{v^2}{2g} \tag{3.53}$$

siendo Z la cota desde la superficie de referencia a la solera del canal e y la cota de la superficie libre medida desde la solera (calado). El término $h = Z + y$ en canales representa la cota piezométrica que es directamente observable, ya que se corresponde con la lámina de agua.

Conducciones en presión

IV

4.1 Pérdidas de carga

La pérdida de carga en una conducción es la pérdida de energía que se produce debida a la circulación de un fluido a través de un conducto. Se puede dividir en:

- **Continua:** es la pérdida de carga debida a las fuerzas viscosas que se oponen al movimiento. Es directamente proporcional a la distancia recorrida.

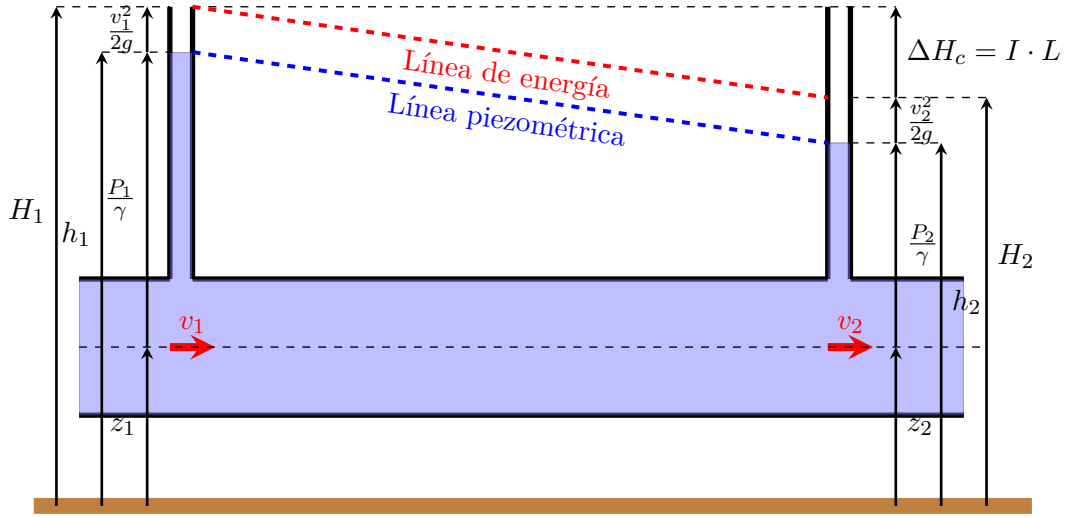


Figura 4.1: Perdida de carga continua entre dos secciones de una conducción

- **Localizada:** es la pérdida de energía asociada a una anomalía que se produce en la conducción. Por ejemplo, válvulas, estrechamientos, salidas de depósito etc.

En una circulación entre dos puntos dados (1 y 2), la variación de energía se corresponderá con la suma de las pérdidas, tanto continuas (ΔH_c) como localizadas (ΔH_l), que existen entre ellos. En ese caso la expresión del trinomio de Bernoulli resulta:

$$Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + \Delta H_c + \Delta H_l \tag{4.1}$$

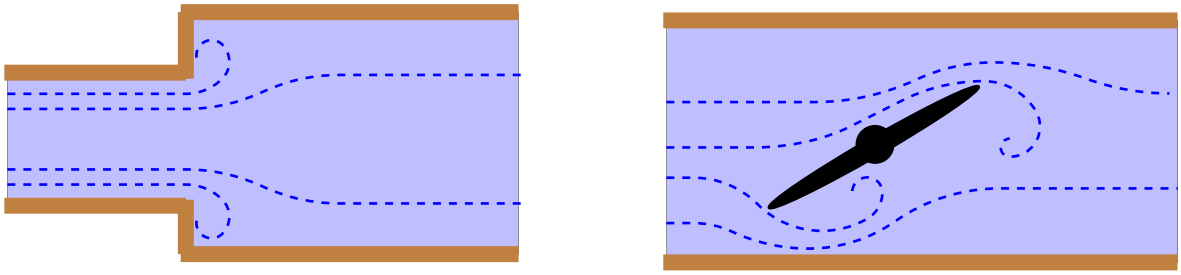
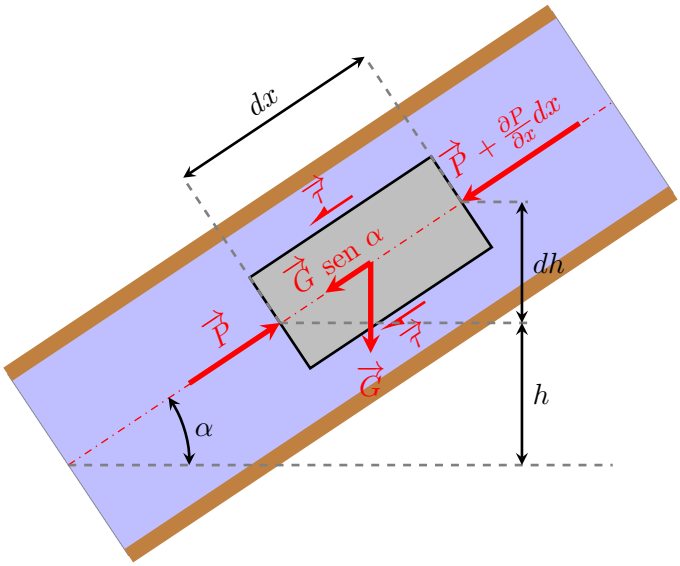


Figura 4.2: Pérdida de carga localizada en un ensanchamiento y en una válvula

4.1.1 Pérdida de carga continua

Planteamos el equilibrio de fuerzas en el eje de un tubo de flujo contenido en una tubería circular. Se han realizado las siguientes hipótesis:

- La tubería es circular, es decir se puede asimilar a un tubo de flujo circular.
- Las líneas de corriente son paralelas.
- El movimiento es uniforme ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$).
- La energía se conserva.



Las fuerzas en el eje de la conducción las podemos desglosar en:

- **Presión:**

$$F_p = \left[\vec{P} - \left(\vec{P} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial x} dx\right)\right] \pi r^2 = -\frac{\partial \vec{P}}{\partial x} \pi r^2 dx \tag{4.2}$$

- **Peso:**

$$F_\gamma = -G \text{ sen } \alpha = -\gamma \pi r^2 dx \text{ sen } \alpha = -\gamma \pi r^2 dx \frac{\partial h}{\partial x} \tag{4.3}$$

- **Fricción:**

$$F_\tau = -2\pi \tau r dx \tag{4.4}$$

En el equilibrio:

$$\Sigma F = 0: \qquad -\frac{\partial \vec{P}}{\partial x} \pi r^2 dx - \gamma \pi r^2 dx \frac{\partial h}{\partial x} - 2\pi r dx \tau = 0 \tag{4.5}$$

Dividiendo por el peso:

$$\frac{-\frac{\partial \vec{P}}{\partial x} \pi r^2 dx - \gamma \pi r^2 dx \frac{\partial h}{\partial x} - 2\pi r dx \tau}{\gamma \pi r^2 dx} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{P}{\gamma} + h\right) = -\frac{2\tau}{\gamma r} \tag{4.6}$$

Si se considera un tubo indeformable, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha\frac{v^2}{2g}\right)=0$, y movimiento permanente, $\frac{dv}{dt}=0$, añadir el término $\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha\frac{v^2}{2g}\right)=0$ no modifica la ecuación anterior, resultando:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{P}{\gamma}+h+\alpha\frac{v^2}{2g}\right)=-\frac{2\tau}{\gamma r}=I_m \tag{4.7}$$

siendo I_m la perdida de energía media por unidad de longitud o pendiente de pérdidas.

Despejando las tensiones tangenciales en el contorno (pared de la tubería):

$$\tau=\gamma I\frac{r}{2}=\gamma I R_H \tag{4.8}$$

Es decir, las tensiones tangenciales varían linealmente con el radio ($\tau=\tau_0\frac{r}{R}$). Al término R_H se le denomina **radio hidráulico** y expresa la relación entre la superficie y el perímetro mojado de la sección:

$$R_H=\frac{S}{P_m} \tag{4.9}$$

En el caso de un tubo circular:

$$R_H=\frac{S}{P_m}=\frac{\pi r^2}{2\pi r}=\frac{r}{2}=\frac{D}{4} \tag{4.10}$$

Cuando la tubería no es circular tomamos de forma general:

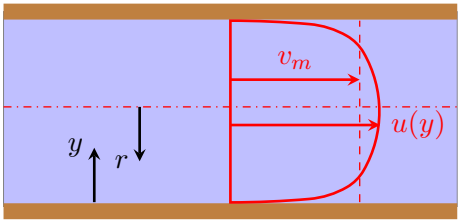
$$I_m=\frac{\tau_0}{\gamma R_H} \tag{4.11}$$

4.1.2 Determinación de la pendiente de pérdidas

Movimiento laminar

Para determinar la pendiente de pérdidas media I_m en función de la velocidad media de circulación cuando el movimiento es laminar, se parte de la expresión de la ley de viscosidad de Newton:

$$\tau=\mu\frac{du}{dy}=-\mu\frac{du}{dr} \tag{4.12}$$



dado que r e y tienen signo contrario. u representa la velocidad puntual en cada una de las líneas de corriente que atraviesan la sección.

En el caso de tuberías circulares, igualando (4.8) y (4.12) se cumple:

$$\tau=-\mu\frac{du}{dr}=\gamma I_m\frac{r}{2}\quad\rightarrow\quad du=-\frac{\gamma}{2}\frac{I_m}{\mu}r\,dr \tag{4.13}$$

Integrando:

$$u=-\frac{\gamma I_m}{4\mu}r^2+C \tag{4.14}$$

La condición aplicada para resolver la constante C es que la velocidad en el contorno es nula ($u = 0$ para $r = D/2$), resultando:

$$C = \frac{\gamma I_m}{4\mu}\frac{D^2}{4} \quad \rightarrow \quad u = \frac{\gamma I_m}{4\mu}\left(\frac{D^2}{4} - r^2\right) \tag{4.15}$$

lo que se corresponde con un paraboloide de revolución.

Si se considera la velocidad media (v) como:

$$v = \frac{\int u dS}{S} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^r u r dr d\theta}{\pi\frac{D^2}{4}} = \frac{8\gamma I_m}{4\mu D^2}\int_0^{D/2}\left(\frac{D^2}{4} - r^2\right) r dr = \frac{\gamma I_m}{32\mu}D^2 \tag{4.16}$$

Por tanto, la pendiente de pérdidas resulta:

$$I_m = \frac{32\mu v}{\gamma D^2} \tag{4.17}$$

Esta expresión se conoce como la ecuación de Hagen-Poiseuille.

Movimiento turbulento

Mientras que en el movimiento laminar las fuerzas viscosas predominan sobre las fuerzas de inercia, en el movimiento turbulento, y debido a la mayor velocidad del flujo, las fuerzas de inercia aumentan produciendo inestabilidades. Estas dan lugar al fenómeno de la turbulencia, modificando la relación existente entre τ y $\frac{du}{dy}$.

En el movimiento turbulento el valor de la pendiente de pérdidas se determina experimentalmente. Mediante el experimento de Reynolds se establece que el tipo de régimen esta determinado por el número de Reynolds, dado por:

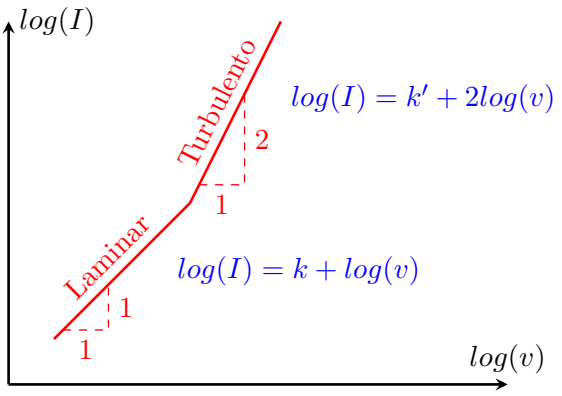

Experimento de Reynolds

$$R_e = \frac{v\,D}{\nu} \tag{4.18}$$

siendo:

R_e	Número de Reynolds	$(-)$
v	Velocidad media de circulación del fluido en la sección	(m/s)
D	Diámetro de la tubería	(m)
ν	Viscosidad cinemática del fluido	(m^2/s)

La representación de la velocidad frente a la pendiente de pérdidas en escala logarítmica, se corresponde con el resultado mostrado en la figura. Experimentalmente se comprueba que la pérdida de carga unitaria es proporcional al cuadrado de la velocidad.
Entre las fórmulas desarrolladas experimentalmente para su uso en el cálculo, pero que carecen de una clara base científica están:



- Hazen-Williams

$$v = 0.849 C_{HW} R_H^{0.63} I_m^{0.54} \tag{4.19}$$

siendo C_{HW} el coeficiente de Hazen-Williams que depende de la rugosidad del tubo, el radio hidráulico y la pendiente de pérdidas.

- Scoley

$$v = 226.5 C_S R_H^{0.625} I_m^{0.5} \tag{4.20}$$

siendo $C_S = 0.29 \sim 0.40$ el coeficiente de Scoley

- Manning

$$v = \frac{1}{n} R_H^{2/3} I_m^{0.5} \tag{4.21}$$

siendo n el coeficiente de Manning que depende del material de la conducción.

De ellas, la fórmula de Manning es ampliamente aceptada todavía en nuestro pais para el cálculo cuando la relación entre el volumen transportado frente al condicionante del rozamiento en el contorno es relativamente grande.

En el caso de las tuberías donde el contorno influye más claramente en el transporte se utiliza la expresión de **Darcy-Weisbach** que se muestra a continuación:

$$I = \frac{f}{D} \frac{v^2}{2g} \tag{4.22}$$

donde f es el coeficiente de fricción de Darcy-Weisbach. Este coeficiente no solo depende de la rugosidad del material como en las fórmulas anteriores, sino también de la velocidad de circulación en la tubería además de la viscosidad y la densidad del fluido circulante. Esta relación se obtiene de la **fórmula de Colebrook** que se muestra a continuación:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left(\frac{\frac{\varepsilon}{D}}{3.71} + \frac{2.51}{R_e \sqrt{f}} \right) \tag{4.23}$$

donde ε es la **rugosidad absoluta** de la tubería. Al término $\frac{\varepsilon}{D}$ se le conoce como **rugosidad relativa** de la tubería.

Esta ecuación se ha deducido del análisis dimensional aplicado a la ecuación general de la hidráulica, considerando únicamente los monomios adimensionales debidos a la rugosidad relativa (ε/D), el número de Euler (E_u) y el número de Reynolds (R_e).

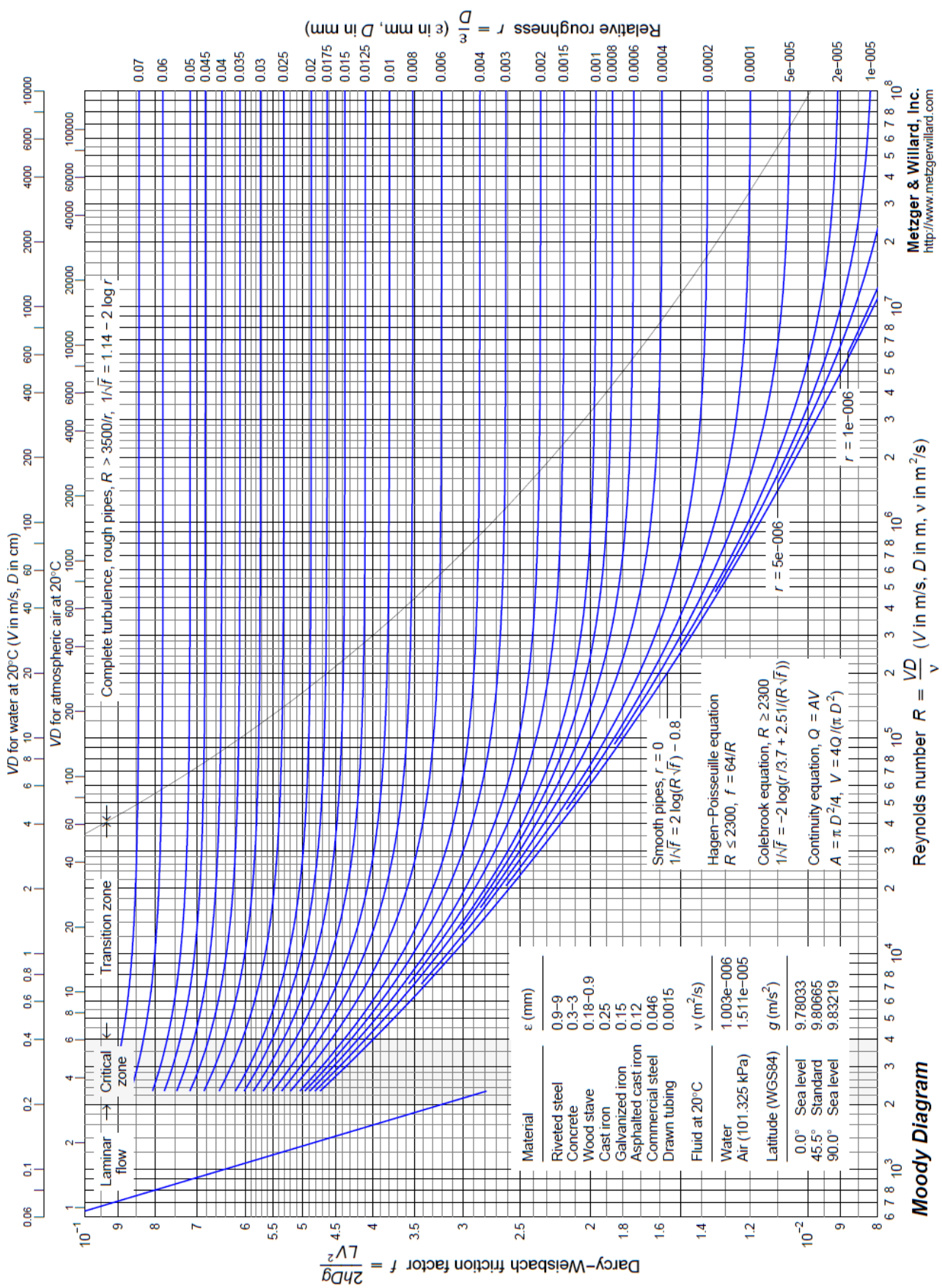


Figura 4.3: Abaco de Moody

La resolución de esta ecuación implícita puede realizarse de manera gráfica mediante el **Ábaco de Moody** que se muestra en la figura 4.3. En general puede observarse que para valores altos del número de Reynolds, el término $(\frac{2.51}{R_e\sqrt{f}})$ se hace cercano a cero. Por tanto, puede partirse, en una primera iteración, del valor obtenido de $\frac{1}{\sqrt{f}}$ de la ecuación cuando no se considera este término, y meterlo posteriormente en la ecuación. La resolución de esta forma tiene una convergencia muy rápida en la solución.

También puede partirse de otras aproximaciones como la de Haaland (1983):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1.8\log_{10}\left[\left(\frac{\frac{\varepsilon}{D}}{3.715}\right)^{1.11} + \frac{6.9}{R_e}\right] \quad \text{con límite de aplicación} \quad 4000 \leq Re \leq 10^8 \tag{4.24}$$

y un error de aproximación $e \approx 1,5\%$

o la de Swamee-Jain:

$$f = \frac{0.25}{\left[\log_{10}\left(\frac{\frac{\varepsilon}{D}}{3.715} + \frac{5.74}{R_e^{0.9}}\right)\right]^2} \quad \text{con límites de aplicación} \quad \begin{cases} 10^{-6} \leq k/D \leq 10^{-2} \\ 4000 \leq Re \leq 10^8 \end{cases} \tag{4.25}$$

y un error de aproximación $e \approx 1,0\%$

La zona de la derecha del ábaco de Moody, con valores elevados de R_e, se corresponde a la zona de flujo turbulento totalmente desarrollado donde el valor de f es independiente del número de Reynolds. La zona crítica se establece en el cambio entre régimen laminar y turbulento ($R_e \simeq 2300$) por el cambio brusco que sufre el valor de f. Esta anomalía hace que para tuberías con flujo en este rango pueda no encontrarse soluciones en problemas que deban resolverse iterativamente. Entre la zona crítica y la zona de flujo totalmente desarrollado existe una zona de transición donde el valor de f depende del número de Reynolds y de la rugosidad relativa (ε/D). La parte izquierda del gráfico representa la zona correspondiente al régimen laminar, donde el coeficiente de Darcy depende únicamente del valor del número de Reynolds y se obtiene igualando (4.22) y (4.22):

$$\left.\begin{aligned} I &= \frac{32\mu v}{\gamma D^2} \\ I &= \frac{f}{D}\frac{v^2}{2g} \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \quad f = \frac{64}{R_e} \tag{4.26}$$

4.1.3 Comentarios

A continuación se destacan varios aspectos que se consideran interesantes:

- En general, el flujo en tuberías es en régimen turbulento. En el caso del agua, se requiere un valor del término $v \cdot D < 2.3 \cdot 10^{-3}$ para obtener régimen laminar, lo que implica valores muy reducidos de la velocidad o del diámetro.
- En régimen turbulento, las pérdidas de carga, tanto continuas como localizadas, dependen del cuadrado de la velocidad (v^2) por lo que duplicar la velocidad implica multiplicar por cuatro la pérdida de carga. $\Delta H_c = f(v^2) = f(Q^2)$

- El diseño de sistemas de transporte por tubería suele plantearse como un binomio de coste del tubo frente a la capacidad de transporte, donde:
  - Tubos con mayor diámetro permiten velocidades más bajas de circulación, y por tanto menor pérdida de carga en el transporte.
  - Tubos de mayor diámetro son más caros.
  - Tubos de mayor diámetro dispuestos entre 2 depósitos con una diferencia fija de nivel entre ellos permiten una mayor circulación de caudal sin necesidad de bombeo.

  El coste de construcción tiene que tener en cuenta estos aspectos.
- Una velocidad cercana a 1 - 2 m/s se considera adecuada para la mayoría de las conducciones, aunque esta cifra es solo una indicación para saber donde suele estar el rango de trabajo. Las variaciones pueden ser muy grandes en función de las condiciones locales.

4.2 Pérdida de carga localizada

Anteriormente se ha definido la pérdida de carga localizada como la pérdida de energía asociada a una anomalía que se produce en la conducción. Esta suele representarse como un descenso brusco en las líneas piezométricas y de energía de la conducción. Sin embargo, en la realidad, es un tramo corto de tubería el que se ve afectado por las condiciones de variación del flujo que provocan esta pérdida de carga, por ello le llamamos localizadas.

Los elementos susceptibles de provocar estas pérdidas son:

- Codos
- Bifurcaciones o piezas en Tes
- Estrechamientos y reducciones de diámetro
- Ensanchamientos
- Válvulas
- Salidas de depósitos
- Entradas en depósitos

En el presente capítulo se estudian algunas de estas anomalías de forma particular. De forma general, se puede decir que la pérdida de carga localizada en régimen turbulento puede expresarse como:

$$\Delta H_l = \varphi \frac{v^2}{2g} \tag{4.27}$$

siendo:

ΔH_l	Pérdida de carga localizada	(m)
φ	Coeficiente de pérdida de carga localizada	$(-)$
v	Velocidad media	(m/s)

Puede verse que, igual que en el caso de la pérdida de carga continua, en régimen turbulento, la pérdida de carga localizada es función del término $\frac{v^2}{2g}$.

El coeficiente de pérdida de carga localizada depende del tipo de anomalía que esta produciendo la pérdida de carga y en muchos casos se determina experimentalmente. En otros casos puede obtenerse de la aplicación de fórmulas teóricas.

Este coeficiente puede ser variable en algunos dispositivos, como por ejemplo las válvulas donde puede encontrarse asociado a diferentes niveles de apertura. Ello es debido a que se producen diferentes modificaciones en el flujo en función del grado de apertura. Existen válvulas cuyo diseño se realiza para un funcionamiento de completamente abiertas o cerradas, pudiendo dar problemas y excesivo desgaste de la misma en grados intermedios de apertura.

En muchos de estos elementos, no solo válvulas, son los fabricantes los que facilitan los coeficientes de pérdida de carga que determinan experimentalmente.

Algunos valores orientativos pueden encontrarse en la "Guia técnica sobre tuberías para el transporte de agua a presión" o en el vínculo siguiente:

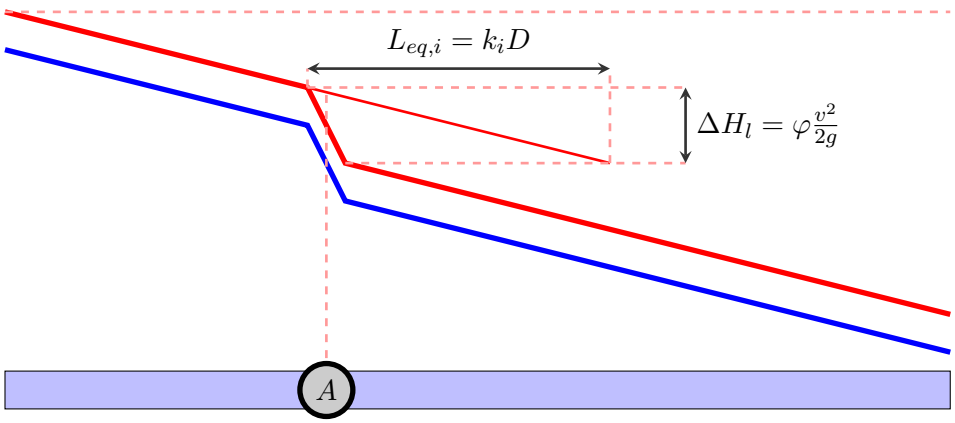


http://es.wikipedia.org/wiki/Perdida_de_carga

En algunas ocasiones, es habitual encontrar la pérdida de carga localizada como una longitud equivalente de pérdida de carga continua, facilitándose esta como un número k de diámetros (D) de tubería. Es decir: $L_{eq} = k \cdot D$

$$\varphi \frac{v^2}{2g} = I \cdot L_{eq} = I \cdot k \cdot D = \frac{f}{D} \frac{v^2}{2g} k \cdot D = f \cdot k \frac{v^2}{2g} \tag{4.28}$$

En la figura adjunta se muestra esta equivalencia en el comportamiento de la línea de energía en una tubería en la que existe una anomalía con una pérdida de carga localizada en el punto A.



En este caso, la tubería se calcula únicamente utilizando pérdidas de carga continuas aplicadas en

una longitud de tubo equivalente dada por:

$$L_{eqv} = L_{real} + \sum_{i=1}^{i=n} L_{eq,i} \tag{4.29}$$

siendo n el número de puntos donde se producen pérdidas de carga localizadas y k_i el número de diámetros equivalentes a cada una de ellas.

Si se utiliza la fórmula de Manning para la pendiente de pérdidas:

$$\varphi\frac{v^2}{2g} = \frac{n^2v^2}{R_H^{4/3}}L = k\cdot D \quad \rightarrow \quad L = \frac{\varphi}{2g}\frac{R_H^{4/3}}{n^2} = \frac{\varphi D^{4/3}}{2^{11/3}gn^2} = \frac{\varphi D^{1/3}}{2^{11/3}gn^2}D = k\cdot D \tag{4.30}$$

resultando:

$$k = \frac{\varphi D^{1/3}}{2^{11/3}gn^2} \tag{4.31}$$

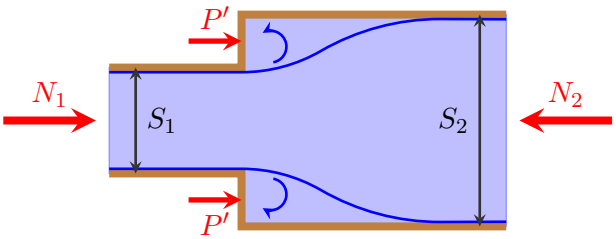
Procediendo de forma análoga con la fórmula de Darcy, se obtendría:

$$\varphi\frac{v^2}{2g} = \frac{f}{D}\frac{v^2}{2g} \quad \rightarrow \quad k = \frac{\varphi}{f} \tag{4.32}$$

4.3 Ensanchamientos

4.3.1 Ensanchamiento brusco. Ecuación de Borda-Carnot

En el caso de un ensanchamiento brusco de sección, la pérdida de carga localizada puede determinarse teóricamente mediante la expresión de Borda-Carnot. Para ello se utilizan las siguientes tres ecuaciones aplicadas al volumen de control mostrado en la figura.



1. **Continuidad:**

$$Q = v_1S_1 = v_2S_2 \quad \rightarrow \quad v_2 = v_1\frac{S_1}{S_2} \tag{4.33}$$

2. **Bernoulli de 1 a 2**, sin considerar pérdida de carga continua, por producire el ensanchamiento en una longitud corta de tubería:

$$Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \Delta H_l \tag{4.34}$$

Considerando que $Z_1 = Z_2$, al estar el tubo en posición horizontal, y sustituyendo la ecuación de continuidad, se llega a:

$$\Delta H_l = \frac{P_1 - P_2}{\gamma} + \frac{1}{2g}\left(v_1^2 - v_2^2\right) = \frac{P_1 - P_2}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g}\left[1 - \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2\right] \tag{4.35}$$

Debe tenerse en cuenta que la sección 2 debe situarse en un punto donde las líneas de corriente puedan considerarse paralelas.

3. **Cantidad de movimiento:**

$$P_1 S_1 + \rho v_1^2 S_1 + P' (S_2 - S_1) - \left(P_2 S_2 + \rho v_2^2 S_2\right) + \overrightarrow{R} = 0 \tag{4.36}$$

El peso $\overrightarrow{G}$ no se ha considerado por ser perpendicular al plano de la figura. Las reacciones $\overrightarrow{R}$ son debidas a la tensión tangencial, y son las que producirían la carga continua que se ha despreciado. El valor de P' puede considerarse aproximadamente igual a P_1, resultando:

$$(P_1 - P_2) S_2 = \rho \left(v_2^2 S_2 - v_1^2 S_1\right) = \rho v_1^2 \left[\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 S_2 - S_1\right] \tag{4.37}$$

Dividiendo por γS_2 ambos términos, y multiplicando y dividiendo por 2 el de la derecha:

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} = \frac{v_1^2}{2g}\left[2\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 2\frac{S_1}{S_2}\right] \tag{4.38}$$

Sustituyendo el término $\frac{P_1 - P_2}{\gamma}$ en la ecuación (4.35), se llega a:

$$\Delta H_l = \frac{v_1^2}{2g}\left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 = \varphi \frac{v_1^2}{2g} \quad \rightarrow \quad \varphi = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 = \left(1 - \frac{D_1^2}{D_2^2}\right)^2 \tag{4.39}$$

4.3.2 Entrada en un depósito

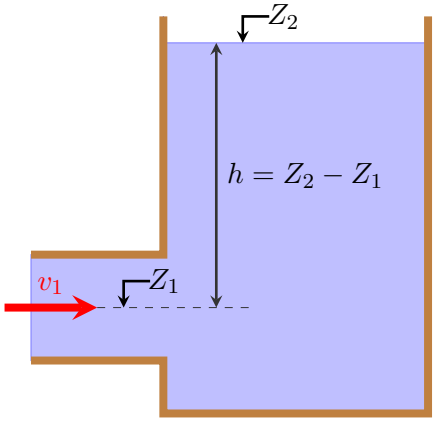
La entrada en un depósito es un caso particular de la ecuación de Borda-Carnot anterior en la que $S_2 \gg S_1$ lo que implica que:

$$\varphi = 1 \tag{4.40}$$

siendo por tanto la pérdida de carga localizada:

$$\Delta H_l = \frac{v^2}{2g} \tag{4.41}$$

La interpretación física de esta pérdida de carga localizada se puede asimilar a que la partícula que entra en un depósito donde el resto de las partículas no se mueven pierde su componente de energía cinética, conservado la energía correspondiente a las fuerzas potenciales y de presión.
Este mismo fenómeno puede analizarse si consideramos la ecuación de Bernoulli entre las secciones 1 y 2 de la figura, en la que un flujo entra en un depósito:



$$Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \Delta H_l \tag{4.42}$$

Los términos $\frac{P_2}{\gamma}$ y $\frac{v_2^2}{2g}$ son nulos al trabajar con presiones relativas y estar en la superficie del depósito.

La presión en el punto 1 es $P_1 = \gamma h$ donde h es la altura de columna de agua que coincide con $h = Z_2 - Z_1$, por lo que al sustituir en la expresión anterior, resulta:

$$\Delta H_l = \frac{v_1^2}{2g} \tag{4.43}$$

coincidiendo con el resultado dado en (4.41).

4.4 Pérdida de carga en estrechamientos

En general, un estrechamiento puede estudiarse a través de la contracción de la vena líquida aguas abajo de la misma con un planteamiento algo más complicado que el realizado anteriormente para el ensanchamiento y con unas hipótesis simplificadoras que no hacen tan válido el resultado final obtenido.

4.4.1 Estrechamiento brusco

En este caso, no se va a realizar la deducción matemática de las ecuaciones facilitándose únicamente la formulación práctica que se alcanza para este caso:

$$\varphi = 0.5\left(1 - \frac{S_2}{S_1}\right) = 0.5\left(1 - \frac{D_1^2}{D_2^2}\right) \tag{4.44}$$

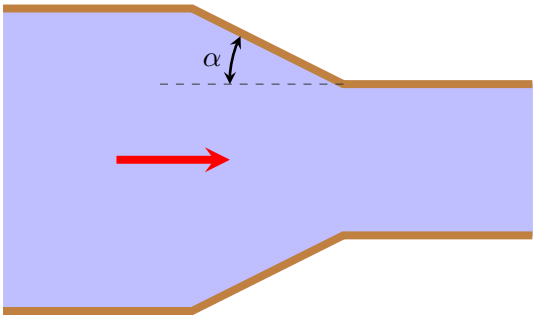
Siendo la pérdida de carga localizada:

$$\Delta H_l = \varphi \frac{v_2^2}{2g} \tag{4.45}$$

Comparando con la fórmula de Borda-Carnot puede verse que la relación entre áreas es lineal frente al cuadrado que se tenia en la fórmula previa. En ambos casos el diámetro o área correspondiente a la parte más estrecha es la que aparece en el numerador.

Es muy importante recalcar que el término de velocidad que da lugar a la pérdida de carga localizada, tanto en estrechamiento como ensanchamientos, viene referido a la sección más estrecha que es la que tiene una velocidad mayor.

4.4.2 Estrechamiento gradual

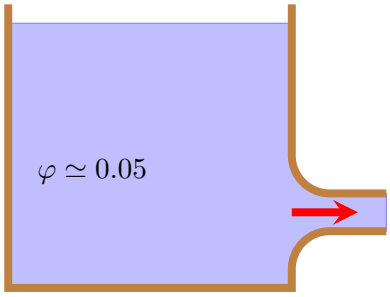


En los estrechamientos graduales entre tuberías circulares de distintos diámetros unidas por una sección troncocónica, las pérdidas de carga localizadas pueden considerarse pequeñas y en muchos casos despreciables. A continuación se dan valores estimativos del coeficiente de pérdidas para distintos casos:

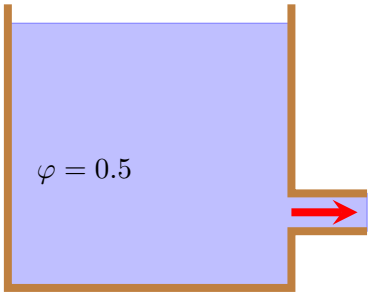
- $\varphi = 0.10$ para $\alpha = 20°$ a $40°$
- $\varphi = 0.05$ cuando la transición es en curva en vez de entre aristas rectas

4.4.3 Salida de un depósito

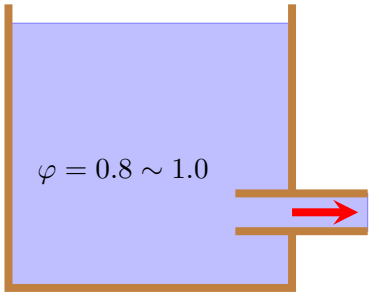
La salida de un depósito puede tener distintos coeficientes de pérdida de carga dependiendo principalmente de su geometría. Así, en el caso de que esté abocinada pueden obtenerse valores de $\varphi \simeq 0.05$, lo que puede considerarse despreciable en muchos casos. Para salida recta en el depósito, el coeficiente de pérdida de carga localizada tiene un valor aproximado de $\varphi \simeq 0.5$, y en los casos en que el tubo penetra en el interior del depósito este valor puede variar de $\varphi = 0.8$ a $\varphi = 1.0$



Salida abocinada



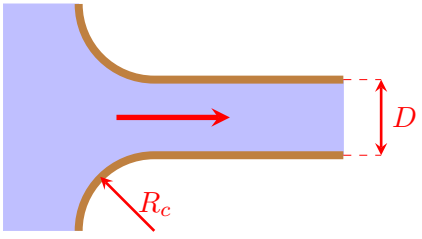
Salida recta



Tubería con reentrada

Obsérvese que en el caso de depósito con salida recta la formulación coincide con la facilitada para el estrechamiento brusco cuando $S_1 \to \infty$.

4.4.4 Salida de un depósito abocinada con radio de curvatura dado



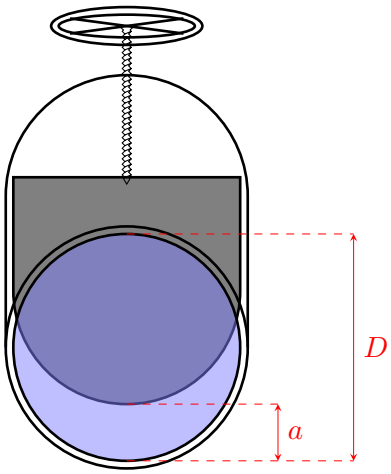
Cuando la salida del depósito se realiza mediante una transición curva de radio de curvatura R_c, en una tubería de diámetro D, el coeficiente de pérdida de carga se puede obtener en la tabla siguiente:

R_c/D	0.10	0.25	0.04	1.0
φ	0.15	0.06	0.04	0.005

4.5 Perdida de carga localizada en válvulas

4.5.1 Válvulas de compuerta

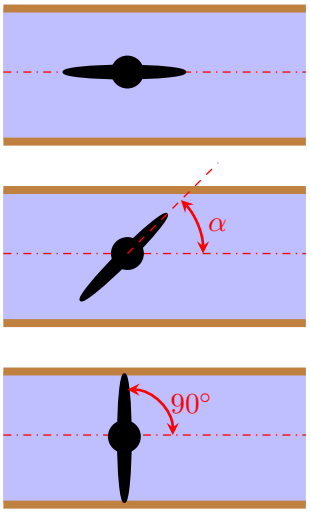
Las válvulas de compuerta funcionan deslizado una compuerta transversal al eje de la tubería que va cerrando el paso del fluido en su interior. Normalmente el movimiento lineal en el tiempo se corresponde con el del vástago vertical que va cerrando el paso del agua. Por tanto, el área libre para el paso del fluido no tiene esa relación lineal en el tiempo de cierre.

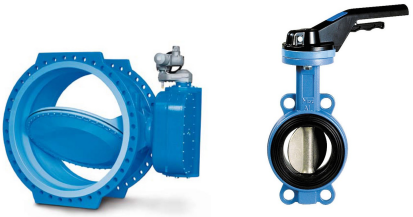


La pérdida de carga localizada se define en función de la relación entre la apertura (a) y el diámetro (D) de la tubería.

a/D	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8	8/8
φ	97	17	7.60	2.10	0.8	0.3	0.07	0.02

4.5.2 Válvulas de mariposa





Las válvulas de mariposa consisten en una sección transversal o lenteja que gira sobre un eje cerrando el paso del agua en la tubería. Cuando están completamente abiertas el flujo se divide entre ambos lados de la válvula.

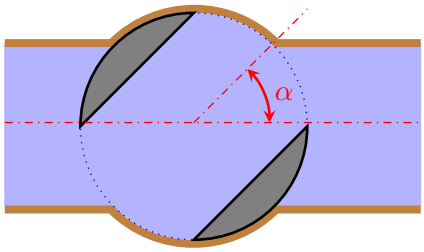
En este caso el movimiento de cierre lineal del actuador se corresponde con el giro de la válvula, que como en las válvulas de compuerta, provoca una variación no lineal en el área disponible para el paso del agua.

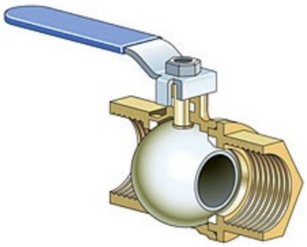
La pérdida de carga localizada se determina en función del ángulo de cierre (α). Los coeficientes de pérdida de carga para válvulas de mariposa los facilita el fabricante, pero para casos habituales pueden obtenerse de la tabla siguiente:

α	10^o	20^o	30^o	40^o	50^o	60^o	70^o
φ	0.5	1.5	3.5	10	30	100	500

4.5.3 Válvulas de esfera

Este tipo de válvulas tienen una esfera de diámetro mayor que el tubo, atravesada por un cilindro de diámetro igual al correspondiente al interior de la tubería que se puede girar 90º respecto de un eje perpendicular al del cilindro que pasa por su centro. La válvula estará completamente abierta cuando el eje del cilindro y el de la tubería coinciden y completamente cerrada cuando ambos ejes sean perpendiculares.







En este caso el movimiento de cierre lineal del actuador se corresponde con el giro de 90º de la manilla que acciona la válvula. Como en los dos casos anteriores, ello provoca una variación no lineal en el área disponible para el paso del agua.

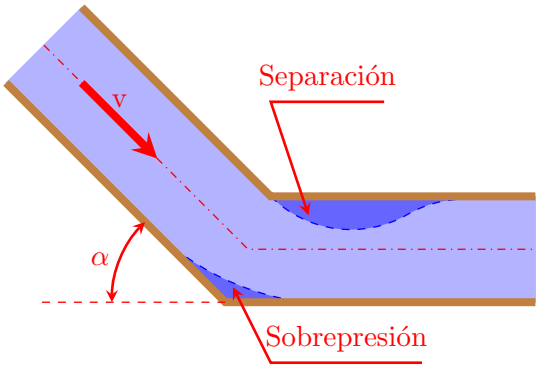
La pérdida de carga localizada se determina en función del ángulo de cierre (α). Los coeficientes de pérdida de carga para válvulas de esfera los facilita el fabricante, pero para los casos más habituales pueden obtenerse de la tabla siguiente:

α	10º	20º	30º	40º	50º	60º	70º
φ	0.3	1.6	5.5	17.3	52.6	206	485

4.6 Pérdidas de carga localizadas en codos

Se van a distinguir dos tipo de codos, los segmentados cuya unión se consigue por la intersección de dos cilindros del mismo diámetro que coinciden en un punto el eje con alineaciones distintas, y los codos circulares cuyo eje sigue una directriz circular de radio conocido para realizar el cambio de dirección.

4.6.1 Codos segmentados



Las pérdidas de carga se deben a las presiones negativas que se producen en la zona de separación y el choque de las partículas contra la zona de sobrepresiones. En ambos casos se pierde parte del término de energía cinética.

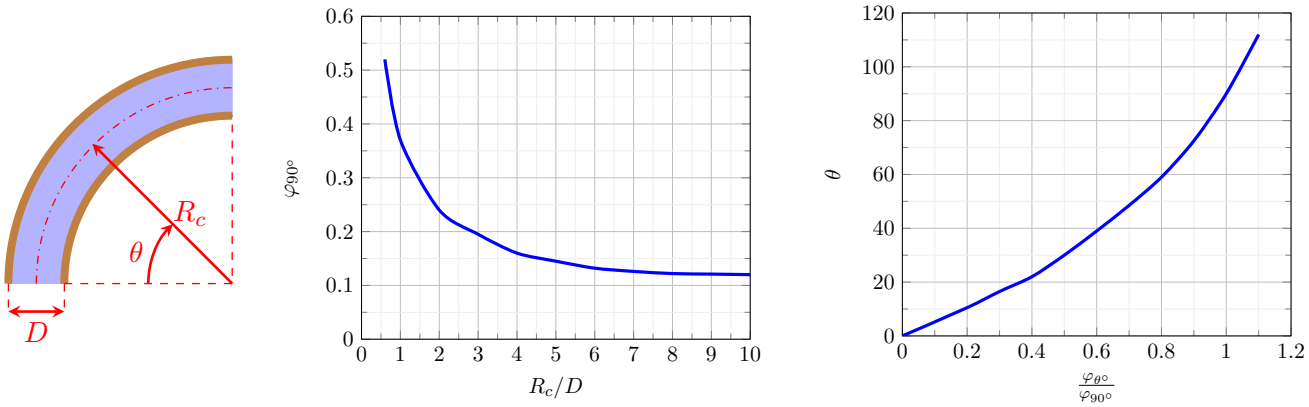
El coeficiente de pérdida de carga que se produce en este tipo de codos puede obtenerse de la tabla siguiente:

α	20º	40º	60º	80º	90º
φ	0.05	0.20	0.50	0.90	1.15

4.6.2 Codos circulares

La pérdida de carga localizada en los codos circulares se obtienen en dos pasos:

- Se obtiene el coeficiente de pérdidas para el codo de 90^{o} (λ_{90°) en la gráfica de la izquierda.
- Se corrige el coeficiente de pérdidas en función del angulo real del codo a través de la relación entre $\frac{\lambda_{\theta^\circ}}{\lambda_{90^\circ}}$ obtenida en a gráfica de la derecha



resultando la pérdida de carga localizada:

$$\Delta H_l = \lambda_{90^\circ} \frac{\lambda_{\theta^\circ}}{\lambda_{90^\circ}} \frac{v_2^2}{2g} \tag{4.46}$$

y el coeficiente de pérdidas:

$$\varphi = \lambda_{90^\circ} \frac{\lambda_{\theta^\circ}}{\lambda_{90^\circ}} \tag{4.47}$$

En el caso de codos a 90° solo es necesario obtener el primero de los valores.

4.7 Cavitación

La cavitación es un fenómeno que se produce cuando la presión en el interior de la tubería es inferior a la presión de vapor del fluido circulante a la temperatura en que se encuentre. Cuando se produce cavitación, las moléculas de agua pasa de fase líquida a fase gaseosa. Esto origina que haya aire en el interior de la tubería lo que no es deseable como ya se ha explicado en el capítulo de propiedades de los fluidos.

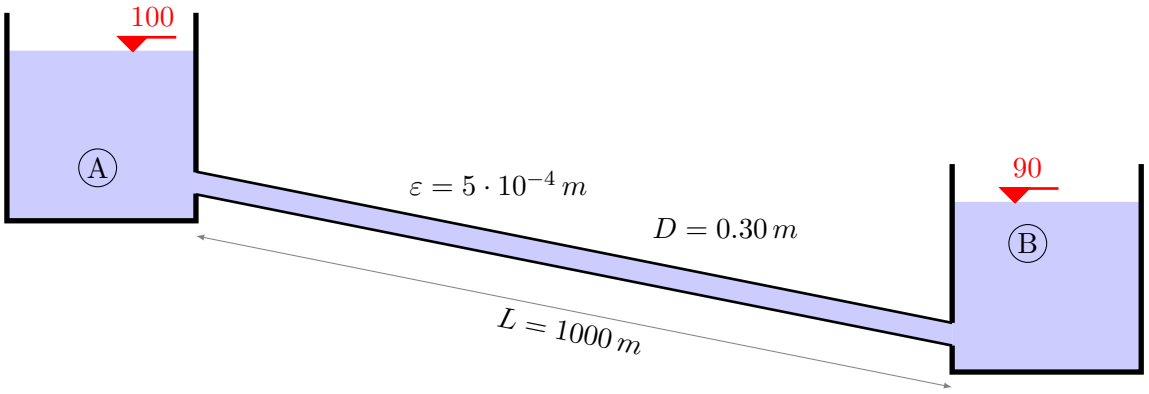
Para comprender mejor este problema, se resuelve el siguiente ejercicio:

Ejemplo

Caudal circulante entre dos depósitos

Una tubería de diámetro $D = 0.3\ m$, longitud $L = 1000\ m$ y rugosidad $\varepsilon = 0.5\ mm$ transporta agua entre dos depósitos con cotas respectivas $z_1 = 100\ m$ y $z_2 = 90\ m$. Se pide calcular el caudal circulante

y la cota máxima a la que puede situarse el punto intermedio para que no se produzca cavitación. Tomar como presiones absolutas de cavitación $P_v^*/\gamma = 0.27\ m.c.a.$ y atmosférica $P_{atm}^*/\gamma = 10.33\ m.c.a.$ y como viscosidad cinemática $\nu = 10^{-6}\ m^2/s$.



Bernoulli de 1 a 2: se considera ambos puntos en la superficie libre de cada uno de los respectivos depósitos

$$Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \Delta H_l + \Delta H_c \tag{4.48}$$

Los términos $\frac{P_i}{\gamma}$ y $\frac{v_i^2}{2g}$ $(i = 1,\ 2)$ son nulos al trabajar con presiones relativas y estar en la superficie del depósito.

Al no decir nada el problema, se supone que la salida del depósito esta abocinada y se desprecia esta pérdida de carga. Únicamente se considerará la pérdida de carga correspondiente a la entrada en el depósito inferior, dada por:

$$\Delta H_l = \frac{v^2}{2g} \tag{4.49}$$

siendo v la velocidad media de circulación en la tubería.

La pérdida de carga continua se determinará por la fórmula de Darcy:

$$\Delta H_c = I \cdot L = \frac{f}{D}\frac{v^2}{2g}L \tag{4.50}$$

La ecuación (4.48) resulta:

$$Z_1 - Z_2 = \frac{v^2}{2g} + \frac{f}{D}\frac{v^2}{2g} = \left(1 + \frac{f}{D}\right)\frac{v^2}{2g} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{2g\frac{Z_1 - Z_2}{1 + \frac{f}{D}L}} \tag{4.51}$$

El factor de fricción f se determina mediante la fórmula de Colebrook:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left(\frac{\frac{\varepsilon}{D}}{3.715} + \frac{2.51}{R_e\sqrt{f}}\right) \tag{4.52}$$

Este es un problema iterativo que se resolverá de la siguiente manera:

- Se supone un valor inicial de f. En este caso se tomará f suponiendo un número de Reynolds muy alto.

- Se calcula la velocidad de circulación con la ecuación (4.51).
- Se obtiene el número de Reynolds ($R_e = \frac{v \cdot D}{\nu}$).
- Se determina un nuevo valor de f mediante la resolución iterativa de la ecuación (4.52).

Suponer un número de Reynolds muy alto, implica escribir la fórmula de Colebrook como:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left(\frac{\frac{0.5\cdot 10^{-3}}{0.3}}{3.715}\right) = \\ = -2\log_{10}\left(4.4486 \cdot 10^{-4}\right) = 6.6962 \tag{4.53}$$

que en el ábaco de Moody se corresponde con la forma recta de cada una de las curvas ε/D (flujo turbulento totalmente desarrollado).

Comenzado con este valor de $f = \frac{1}{6.692^2} = 0.0223$ se obtiene:

$$v = \sqrt{2 \cdot 9.81 \frac{100 - 90}{1 + \frac{0.0223}{0.3} 1000}} = 1.61376\, m/s \tag{4.54}$$

El número de Reynolds resulta:

$$R_e = \frac{1.61376 \cdot 0.3}{10^{-6}} = 484127.3 \tag{4.55}$$

Se obtiene el valor de $\frac{1}{\sqrt{f}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left(\frac{\frac{0.5\cdot 10^{-3}}{0.3}}{3.715} + \frac{2.51 \cdot 10^{-6}}{0.3}\frac{1}{1.61376}6.6962\right) = 6.6315 \tag{4.56}$$

Metiendo este valor nuevamente en la parte derecha de la ecuación, se obtiene un nuevo valor:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left(4.4486 \cdot 10^{-4} + 83.\hat{6} \cdot 10^{-7} \cdot 0.61967 \cdot 6.6315\right) = 6.63148 \tag{4.57}$$

Repitiendo el cálculo varias veces, la solución converge:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left(4.4486 \cdot 10^{-4} + 83.\hat{6} \cdot 10^{-7} \cdot 0.61967 \cdot 6.63148\right) = 6.632082 \tag{4.58}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left(4.4486 \cdot 10^{-4} + 83.\hat{6} \cdot 10^{-7} \cdot 0.61967 \cdot 6.632082\right) = 6.632076 \tag{4.59}$$

Obteniéndose un valor de f:

$$f = \frac{1}{6.632076^2} = 0.022735 \tag{4.60}$$

Alternativamente, con la aproximación de Haaland, se hubiera obtenido:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1.8\log_{10}\left[\left(\frac{\frac{\varepsilon}{D}}{3.715}\right)^{1.11} + \frac{6.9}{R_e}\right] =$$

$$-1.8\log_{10}\left[\left(\frac{\frac{0.5\cdot10^{-3}}{0.3}}{3.715}\right)^{1.11} + \frac{6.9}{484127.3}\right] = 6.63358 \quad \rightarrow \quad f = 0.022725 \tag{4.61}$$

o con la de Swamee-Jain:

$$f = \frac{0.25}{\left[\log_{10}\left(\frac{\frac{\varepsilon}{D}}{3.715} + \frac{5.74}{R_e^{0.9}}\right)\right]^2} = \frac{0.25}{\left[\log_{10}\left(\frac{\frac{0.5\cdot10^{-3}}{0.3}}{3.715} + \frac{5.74}{484127.3^{0.9}}\right)\right]^2} = 0.022852 \tag{4.62}$$

Cualquiera de ellas hubiera podido considerarse válida, aunque la primera es más exacta.

Repetimos ahora el cálculo de los puntos 2 a 4 con el nuevo valor de f

$$v = \sqrt{2\cdot 9.81\frac{100-90}{1+\frac{0.022735}{0.3}1000}} = 1.5985\, m/s \tag{4.63}$$

Se calcula la nueva f utilizando el nuevo valor de la velocidad y el último de $\frac{1}{\sqrt{f}}$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left(4.4486\cdot10^{-4} + 83.\hat{6}\cdot10^{-7}\cdot0.62558\cdot6.632077\right) = 6.63149 \tag{4.64}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left(4.4486\cdot10^{-4} + 83.\hat{6}\cdot10^{-7}\cdot0.62558\cdot6.63149\right) = 6.63149 \tag{4.65}$$

Obteniéndose un valor de f:

$$f = \frac{1}{6.6316^2} = 0.022739 \tag{4.66}$$

La nueva velocidad resulta:

$$v = \sqrt{2\cdot 9.81\frac{100-90}{1+\frac{0.022739}{0.3}1000}} = 1.5984\, m/s \tag{4.67}$$

y el valor de f y v ya no cambia aunque hagamos nuevas iteraciones.

Finalmente el caudal circulante es:

$$Q = vS = 1.5984\frac{\pi 0.3^2}{4} = 0.11298\, m^3/s \tag{4.68}$$

Nota

En todo este cálculo no se ha tenido en cuenta para nada la cota de la tubería. El caudal de circulación es el mismo independientemente de por donde pase la tubería, siempre que no se produzca cavitación.

Ahora se va a estudiar el límite de cota para evitar la cavitación en el punto intermedio (C) de la tubería. Para ello se va a calcular primero la cota piezométrica (h) correspondiente al punto C.

$$h_c = H_1 - \frac{v^2}{2g} - I\frac{L}{2} = 100 - \frac{1.5894^2}{2 \cdot 9.81}\left(1 + \frac{0.02273}{0.3}\frac{1000}{2}\right) = 94.935\, m \tag{4.69}$$

Trabajando con presiones relativas la presión de cavitación resulta

$$\frac{Pr_v}{\gamma} = \frac{P_v^*}{\gamma} - \frac{P_{atm}^*}{\gamma} = 0.27 - 10.33 = -10.06\, m.c.a. \tag{4.70}$$

Por tanto la cota máxima alcanzable en el punto C para que no se produzca cavitación será:

$$h_c = Z_c + \frac{P}{\gamma} = Z_c + \frac{Pr_v}{\gamma} \quad \rightarrow \quad Z_c = h_c - \frac{Pr_v}{\gamma} = 94.935 + 10.06 = 104.995\, m \tag{4.71}$$

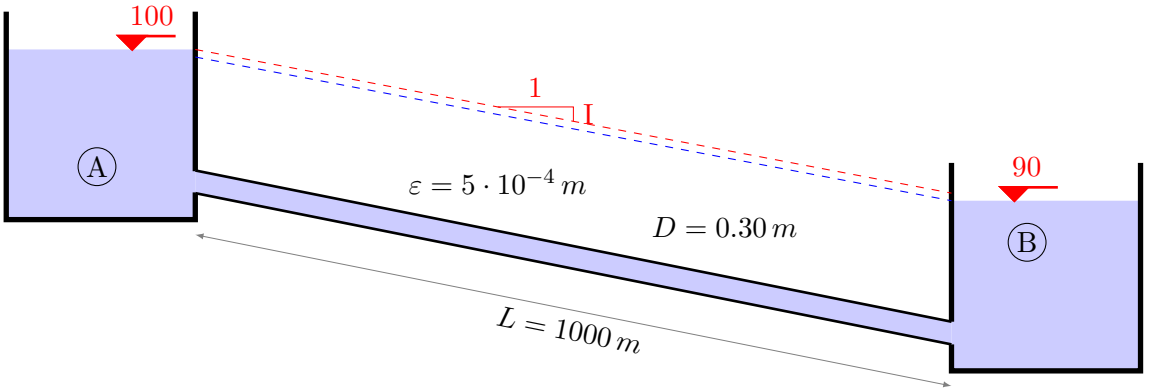
Punto que está por encima de la cota del depósito donde se extrae el agua.

Nota

En general, es aconsejable tener la totalidad de la tubería con presiones relativas positivas. De esta forma se evita que si se produce una rotura, entre el aire en el interior de la misma, pudiendo parar la circulación. Con presiones superiores a la atmosférica se producirá una fuga que servirá como detector de la avería. Además, debe tenerse en cuenta que para poner en circulación una tubería con presiones relativas negativas es necesario realizar una succión.

Una forma muy interesante de realizar la primera aproximación al ejercicio consiste en interpretar físicamente la circulación. Para ello hay que darse cuenta que:

- La diferencia de cotas entre los depósitos es 10 m, y estos están separados una distancia importante (1000 m).
- La pérdida de carga será principalmente debida al rozamiento (pérdida de carga continua).
- La única pérdida de carga localizada se produce en la entrada del depósito de aguas abajo y es $\frac{v^2}{2g}$. Para velocidades normales de circulación, 1 a 2 m/s, representa únicamente de 5 a 20 cm, siendo el resto, hasta completar los 10 m, la pérdida de carga continua.
- Por tanto, podemos inicialmente despreciar esta pérdida de carga localizada y suponer que todo es pérdida de carga continua.



Teniendo en cuenta este razonamiento se puede calcular de la forma siguiente:

La pendiente se puede calcular geométricamente como:

$$I = \frac{z_1 - z_2}{L} = \frac{100 - 90}{1000} = 0.010 \tag{4.72}$$

De la fórmula de Darcy se obtiene el valor de $\frac{1}{\sqrt{f}}$ como:

$$I = \frac{f}{D}\frac{v^2}{2g} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{\sqrt{2gID}}{v} = \frac{\omega}{v} \tag{4.73}$$

siendo $\omega = \sqrt{2gID} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 0.01 \cdot 0.3} = 0.24261$ m/s

Introduciendo éste y el término de Reynolds en la fórmula de Colebrook:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left(\frac{\frac{\varepsilon}{D}}{3.715} + \frac{2.51}{\frac{vD}{\nu}\frac{\omega}{v}}\right) = -2\log_{10}\left(\frac{\frac{\varepsilon}{D}}{3.715} + \frac{2.51\nu}{\omega D}\right) =$$
$$-2\log_{10}\left(\frac{\frac{5\cdot 10^{-4}}{0.3}}{3.715} + \frac{2.51 \cdot 10^{-6}}{0.24261 \cdot 0.3}\right) = 6.632 \tag{4.74}$$

Obteniéndose un valor de f:

$$f = \frac{1}{6.632^2} = 0.022736 \tag{4.75}$$

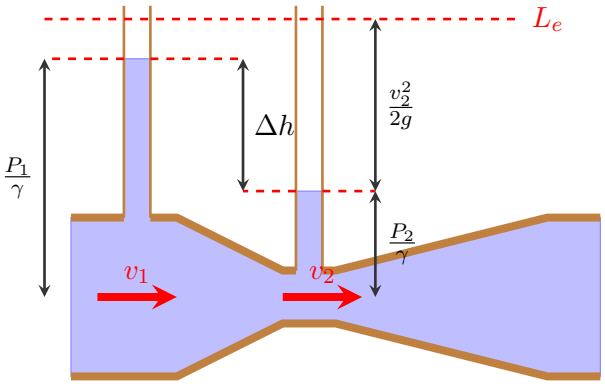
Ahora podemos calcular v teniendo en cuenta la pérdida de carga de entrada al depósito:

$$v = \sqrt{2 \cdot 9.81 \frac{100 - 90}{1 + \frac{0.022736}{0.3}1000}} = 1.5985\, m/s \tag{4.76}$$

lo que ha resultado en una solución más rápida, demostrando además que se tiene un conocimiento previo del comportamiento del sistema

En general, deben evitarse las presiones negativas por los razonamientos facilitados en el ejercicio además de los asociados al comportamiento estructural de la tubería, ya que una tubería con presiones negativas en su interior puede abollarse reduciendo su sección útil lo que disminuiría aun más la presión en el interior de la misma.

La segunda forma de producir cavitación es la reducción de la sección de circulación del fluido. Aguas abajo de la constricción se produce una pérdida de presión por el aumento de la velocidad que puede ser origen de la cavitación. Planteando Bernoulli entre las secciones 1 y 2 del venturi mostrado en la figura, se tiene:



$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} \tag{4.77}$$

Se ha tenido en cuenta que el eje del venturi es horizontal ($z_1 = z_2$), que el diseño permite que las pérdidas de carga localizada sean despreciables y que la longitud es lo suficientemente reducida para despreciar la pérdida de carga continua.

Agrupando los términos de presión en un lado, se obtiene la diferencia de alturas piezométricas observables (Δh). Como se debe cumplir la ecuación de continuidad, la velocidad puede expresarse en función del caudal. Por tanto:

$$\Delta h = \frac{P_1 - P_2}{\gamma} = \frac{8Q^2}{\pi^2 g}\left(\frac{1}{D_2^4} - \frac{1}{D_1^4}\right) \tag{4.78}$$

Esto quiere decir que si la relación de diámetros entre ambas secciones del venturi es lo suficientemente grande para el caudal circulante, se puede crear una diferencia de presiones que llegue a producir la cavitación

$$\Delta h = \frac{P_1 - P_2}{\gamma} = P_{atm} - P_{cav}\gamma \approx 10.33 - 0.27 = 10.04\, mca \tag{4.79}$$

Ejemplo

Comparación de la medición con venturi y Pitot

En una tubería horizontal de 40 cm de diámetro por la que circula agua con una velocidad de 1 m/s se coloca un venturi con diámetro la mitad. Calcular la diferencia de alturas piezométricas en el venturi suponiendo que no hay pérdidas de carga. Hacer lo mismo utilizando un tubo de Pitot en la sección ancha, y comprobar que medida es más exacta.

El caudal circulante será:

$$Q = v \cdot S = v\pi\frac{D_1^2}{4} = 1.0 \cdot \pi\frac{0.40^2}{4} = 0.1257\, m^3/s \tag{4.80}$$

Planteando Bernoulli en el Venturi (secciones 1 a 2):

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} \tag{4.81}$$

Como $z_1 = z_2$, los podemos eliminar de la ecuación. Reagrupando, obtenemos la altura piezométrica como:

$$\begin{aligned}\Delta h = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2}\right) = \frac{16Q^2}{2\pi^2 g}\left(\frac{1}{D_2^4} - \frac{1}{D_1^4}\right) = \\ = \frac{8Q^2}{\pi^2 g}\left(\frac{16}{D_1^4} - \frac{1}{D_1^4}\right) = \frac{120Q^2}{\pi^2 g D_1^4} = 1.2394\frac{Q^2}{D_1^4} = 0.7645\, m\end{aligned} \tag{4.82}$$

Utilizando un tubo de Pitot se tiene que la diferencia entre ambos tubos se corresponde con el término $\frac{v^2}{2g}$. Por tanto:

$$\Delta h = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{Q^2}{2gS^2} = \frac{8Q^2}{\pi^2 g D^4} = \frac{v^2}{2g} = \frac{1^2}{2 \cdot 9.81} = 0.051\, m \tag{4.83}$$

El venturi es $\frac{0.7645}{0.051} = 15$ veces más exacto que el Pitot

$$\frac{\frac{120Q^2}{\pi^2 g D^4}}{\frac{8Q^2}{g\pi^2 D^4}} = 15 \tag{4.84}$$

4.8 Bombas

La bomba es un dispositivo mecánico capaz de transformar energía eléctrica en energía hidráulica. La potencia hidráulica suministrada por una bomba se mide como:

$$W_h = \gamma Q H \tag{4.85}$$

siendo:

γ	Peso específico del fluido elevado	(N/m^3)
Q	Caudal circulante por el circuito	(m^3/s)
H	Altura de elevación del fluido	(m)

Para conseguir suministrar esta energía se requiere que el consumo eléctrico sea algo mayor ya que hay pérdidas en este intercambio que deben tenerse en cuenta. En general se consideran dos tipos de rendimientos, uno asociado a la bomba (η_b), considerando como tal al elemento mecánico con movimiento que produce que el fluido adquiera un mayor energía, y otras asociada al motor eléctrico que genera el movimiento (η_e).

La pérdida de rendimiento en la bomba es debido a los rozamientos, la transmisión de calor, al movimiento del fluido, etc. Esto provoca que la potencia consumida asociada a la bomba sea:

$$W_b = \frac{\gamma Q H}{\eta_b} \tag{4.86}$$

siendo η_b el rendimiento de la bomba en el punto de funcionamiento. Este valor es menor de la unidad. Si se quisiera evaluar la potencia consumida de la red habría que tener en cuenta adicionalmente el rendimiento del motor, resultando:

$$W_e = \frac{\gamma Q H}{\eta_b \, \eta_e} \tag{4.87}$$

La relación entre el caudal, la altura de elevación y el rendimiento de la bomba hace que cada instalación requiera analizarse cuidadosamente para elegir el funcionamiento óptimo de la misma. Esto es más importante cuanto mayor es el tiempo de uso continuado de la misma, donde una buena elección influirá sobre el proceso de amortización del sistema.

Sin entrar en muchos detalles, el primer paso es elegir el tipo de bomba adecuado a nuestra instalación. Entre ellos caben destacar los tipos descritos en el apartado siguiente.

4.9 Clasificación de bombas

Existen una tipología muy amplia de bombas. Una clasificación detallada puede encontrarse en el wiki siguiente:

Clasificación de bombas

De estas solo se comentarán brevemente dos tipos:

Bombas de desplazamiento: Funcionan incrementando la presión del sistema, y sus ventajas son:

- Sencillas, por lo que tienen un bajo costo de mantenimiento.
- El coste de compra es también menor.
- Introducen mucha presión en el sistema. Ello les permite:
  - Trabajar con fluidos de viscosidad elevada.
  - Trabajar con elementos abrasivos al no tener piezas especialmente sensibles a la abrasión, o ser esta más fácilmente reemplazables.
- Pueden estar sumergidas.
- Pueden utilizarse en ambientes inflamables y explosivos.

En cuanto a los caudales, estos se transmiten en forma de pulsos mediante la apertura y cierre de las válvulas que controlan el sistema, y solo son adecuadas para caudales bajos de circulación.

Un ejemplo de este tipo de bomba es el corazón humano.

Bombas centrífugas o rotodinámicas: basan la transmisión de energía mediante la rotación al sistema hidráulico en un incremento de la cantidad de movimiento del sistema. De éstas solo se comentarán tres tipos:

1. Flujo axial: El fluido circula paralelo al eje de rotación. Son como hélices que mueven el agua en la misma dirección del eje de la conducción. Son muy adecuadas para pozos donde deben situarse en el interior de la excavación, especialmente si el diámetro de la excavación es reducido. Pueden situarse sumergidas, en algunos casos en su totalidad, y en otros con el motor fuera del agua. En el caso de estar sumergidas no requieren cebado de las mismas para su correcto funcionamiento.
2. Flujo radial: en estas el flujo sale en dirección perpendicular al eje de rotación. Normalmente éste entra en la bomba por su parte central, y tras recorrer los álabes, se ve empujado en la parte más extrema hacia la tubería de salida. Van situadas fuera del agua y hay que tener en cuenta la altura sobre la toma para evitar la cavitación de la misma. Son las más habituales.
3. Mixtas: El flujo asciende helicoidalmente rodeando al eje de rotación.

4.9.1 Curvas característica y resistente

La altura de fluido (H_b) que se alcanza con una bomba determinada en situada en un sistema hidráulico es función del caudal circulante (Q), la velocidad de rotación o el número de revoluciones de la misma (n) y la viscosidad del fluido en circulación (ν). Ésta última, en algunos fluidos, es a su vez muy dependiente de la temperatura del mismo, que se puede ver incrementada por la circulación en circuito cerrado, como ocurre con el aceite de los automóviles.

$$H_b = f\{Q, n, \nu(T)\} \tag{4.88}$$

En el diseño de un circuito hidráulico, se conoce el fluido que se va a utilizar, y en función del motor que va a mover la bomba, la velocidad de rotación de la misma. Por tanto, para una bomba determinada y un fluido de circulación, puede construirse una curva en la que la altura es únicamente función del caudal circulante:

$$H_b = f(Q) \tag{4.89}$$

Esta es la **curva característica de la bomba** y es el fabricante, mediante experimentación del diseño realizado en laboratorio, el que facilita esta curva. En la figura 4.4 puede verse un ejemplo de este tipo de curva.

En esta curva debemos destacar el punto de parada, con caudal nulo, representado por la altura de 26 m y que corresponde con la máxima altura alcanzable cuando el diámetro del rodete es de diámetro $\phi = 264\ mm$ de diámetro. Existen otras curvas correspondientes a rodetes menores acoplados a la misma bomba.

Además de la curva característica de la bomba, el fabricante facilita la curva de rendimiento de la misma. Ésta es función de las mismas variables que la curva característica y se simplifica igual, en el caso de ser el fluido conocido.

En general el rendimiento viene expresado en las isolíneas de rendimiento que cortan la curva característica. Suele venir expresado en porcentaje. El punto de funcionamiento óptimo de una bomba se corresponde al valor máximo del rendimiento sobre la curva característica. En la curva de ejemplo sería 76% y se encontraría para 20.3 l/s y 22 m de altura de elevación aproximadamente.

Para saber cual es el funcionamiento real de la bomba, debe tenerse en cuenta que esta se haya en un circuito hidráulico por el que debe circular el mismo caudal para que haya continuidad. Para ello utilizaremos el ejemplo mostrado en la figura 4.5

Planteando Bernoulli entre ambos depósitos:

$$Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + \Delta H_b = Z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \Delta H_c + \Delta H_l \tag{4.90}$$

siendo H_b la ganancia de energía hidráulica facilitada por la bomba para el caudal de circulación.

Las pérdidas de carga continuas, se calculan como $\Delta H_c = I \cdot L$, pudiendo I determinarse por Manning o Darcy según los datos disponibles en el problema. El valor de I será el mismo en todos los tramos de tubo siempre que la rugosidad y el diámetro no varíen.

Las pérdidas de carga localizadas se corresponden con:

- La válvula V, $\left(\Delta H_{l_v} = \varphi_v \frac{v^2}{2g}\right)$, siendo φ_v el coeficiente de pérdida de carga localizada en la válvula.
- La entrada en el depósito, dada por $\left(\Delta H_{l_{ent}} = \frac{v^2}{2g}\right)$.
- La salida en el depósito que se ha considerado abocinada, y con pérdida de carga despreciable.

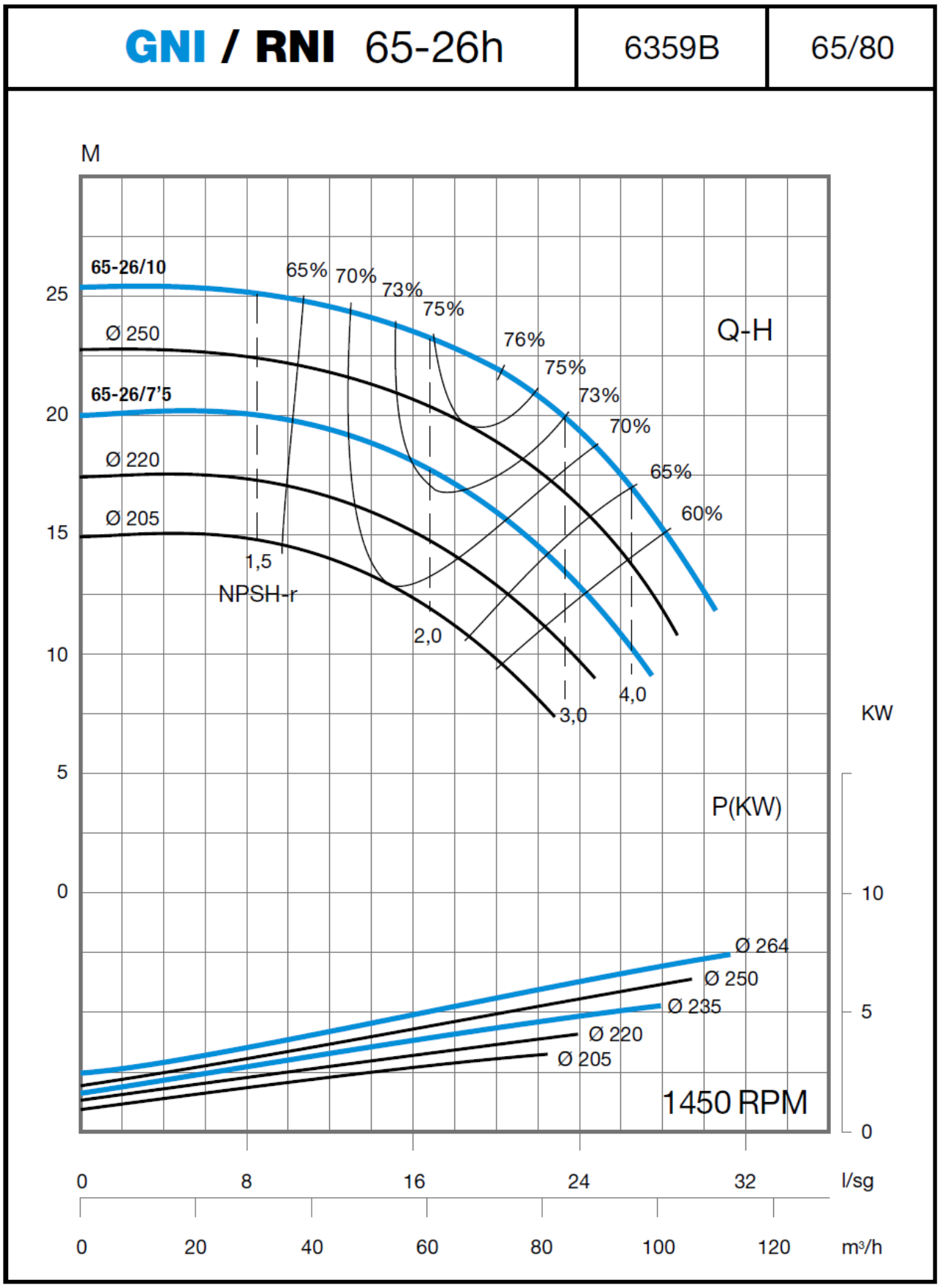


Figura 4.4: Curva característica de una bomba para agua con $N = 1450\, r.p.m.$

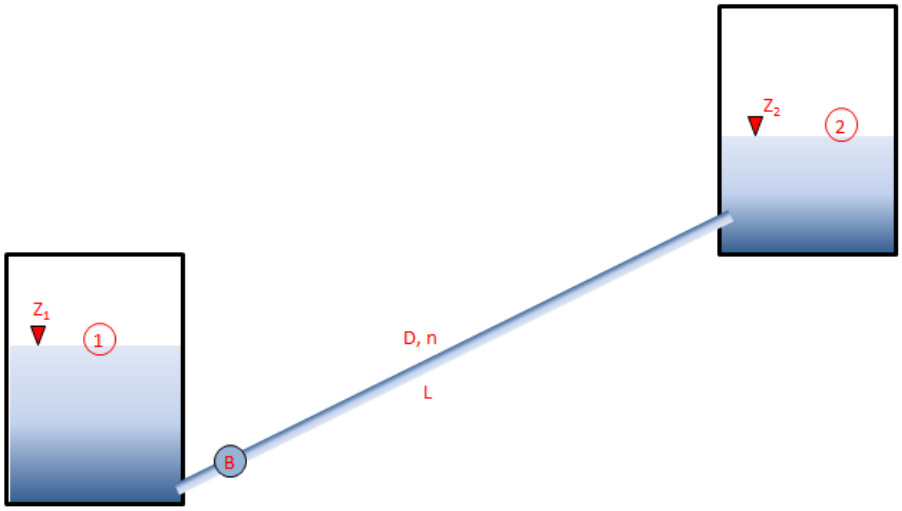


Figura 4.5: Esquema del circuito de ejemplo para obtener el caudal circulante

Los términos $\left(\frac{P_1}{\gamma}; \frac{v_1^2}{2g}; \frac{P_2}{\gamma}; \frac{v_2^2}{2g}\right)$ son todos nulos por estar en el depósito. Debe tenerse en cuenta que en una salida mediante chorro a la atmósfera el término $\left(\frac{v_2^2}{2g}\right)$ no hubiera sido nulo.

De forma general, la ecuación (4.90) puede despejarse como:

$$Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} - \left(Z_2 + \frac{P_2}{\gamma}\right) = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2}\right) + \Delta H_c + \Delta H_l - \Delta H_b \tag{4.91}$$

ecuación que tiene todos los valores dependientes del caudal en el lado derecho.

Si no se tiene definida la ecuación matemática de la curva característica en función de Q, la forma de resolver el problema es:

- Se elimina el término ΔH_b de la ecuación (4.91)
- Se dibuja la curva parabólica, en función de Q^2 que resulta de la resta de la ecuación sobre la gráfica con la curva característica de la bomba. Esta es la denominada **Curva resistente** o **Curva de la conducción**
- Se obtiene el **punto de funcionamiento** como corte de la curva resistente y la característica de la bomba

La curva de la conducción representa las pérdidas de carga para distintos caudales de circulación en el sistema hidráulico esquematizado, incluyendo la diferencia de niveles entre ambos depósitos. Si esta diferencia hubiera sido mayor, la curva hubiera sido la misma pero comenzando en un punto más alto. De la representación de esta curva obtenemos información de la importancia de las pérdidas de carga en relación al caudal circulante en el sistema. El análisis de distintas curvas de resistencia en una misma gráfica (por ejemplo por variación de diámetros en la totalidad o parte de la conducción) puede ayudar diseño óptimo del sistema hidráulico.

4.9.2 Elección de la bomba

Hasta ahora se ha visto cómo trabajar cuando se tiene una conducción y una bomba para obtener la compatibilidad de circulación de caudal entre ambas. Sin embargo en el diseño de un circuito hidráulico los datos suelen ser el caudal demandado y la altura de elevación. Esta última puede ser a un depósito o como presión dentro de un punto del circuito.

Con estos datos, y teniendo en cuenta las pérdidas del prediseño del sistema hidráulico debemos proceder a la elección de una bomba que cumpla lo mejor posible con los requisitos de este sistema.

El primer paso es acudir a los catálogos facilitados por uno o varios fabricantes, donde encontraremos series de bombas agrupadas en función de su tipología. Por ejemplo centrífugas radiales, centrífugas axiales, etc.

En el vínculo siguiente podemos encontrar un gráfico que nos ayudará en esta decisión

Catálogo de bombas ideal

Supongamos que buscamos una bomba horizontal para agua limpia capaz de elevar 1 m^3/min (16.67 l/s) a una altura de 19.5 m. Puede ser que tengamos bombas que funcionan a distintas velocidades. Supongamos que dentro de las posibilidades que tenemos elegimos las bombas que funcionan a $N = 1450$ rpm, se consulta el gráfico (4.6) donde se refleja el campo de validez de cada una de las bombas, y entrando en el punto de interés, se obtiene la bomba GNI/RNI 65-26h.

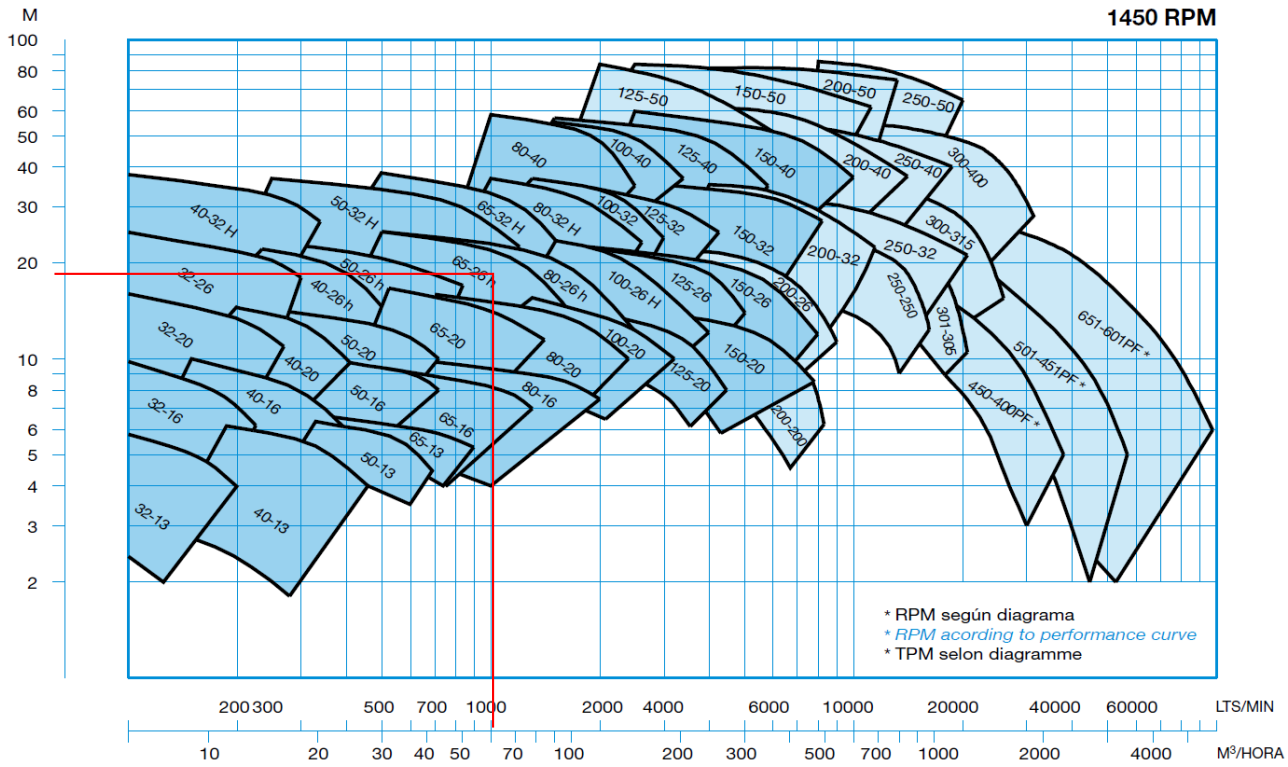


Figura 4.6: Campo de validez de bombas horizontales normalizadas a $N = 1450\, r.p.m.$

La curva característica de esta bomba es la mostrada en la 4.4

Q	4	8	12	16	18	20
H	2.89	5.56	10	16.22	20	24.22

Tabla 4.1: Datos de la curva resistente o curva de la conducción

4.9.3 Punto de funcionamiento

A continuación es el momento de tener en cuenta la curva resistente o curva de la conducción y superponerla con la curva característica de la bomba.

Por ejemplo, si se ha determinado previamente una curva de la conducción dada por:

$$H = 2 + 55555.56Q^2 \tag{4.92}$$

se obtendrían una serie de puntos para una serie de caudales dados en la tabla 4.1.

La representación conjunta de la curva característica y la curva de la conducción superpuesta puede verse en la figura 4.7

Para cada uno de los diámetros de rodete disponibles, se tiene una curva característica de la bomba asociada. El **punto de funcionamiento** en cada uno de ellos estará marcado por el punto de corte con la curva de la conducción.

Si continuamos con el problema propuesto para la elección de la bomba en el apartado anterior, el círculo marcado en verde correspondiente al diámetro de rodete $\phi = 250\ mm$ es el punto de funcionamiento que cumple caudales superiores a 1000 l/min ($16.67\,l/s = 0.01667\,m^3/s$) llegando a una altura superior a 19.5 m que eran los requerimientos exigidos.

Adicionalmente se tiene que el rendimiento es elevado (en torno al 75%) lo que hace que este sea un buen diseño con la bomba elegida.

En este punto de funcionamiento se obtiene un caudal de $18\,l/s = 1080 l/min$ algo superior a lo requerido y una altura de bombeo de 20 m. Existen varias actuaciones posibles para limitar este exceso:

- Colocar una válvula que produzca la suficiente pérdida de carga para limitar la diferencia, pero estamos perdiendo energía innecesariamente.
- Si el depósito lo permite, acumular mas agua y parar de vez en cuando la bomba. Debería tener colchón suficiente para que las paradas y puestas en marcha no sean demasiado continuas.
- Poner un variador de frecuencia, que reduce la frecuencia de 50 Hz de la red, lo que se refleja en una menor velocidad de rotación de la bomba. Esta puede ser la mejor de las soluciones.

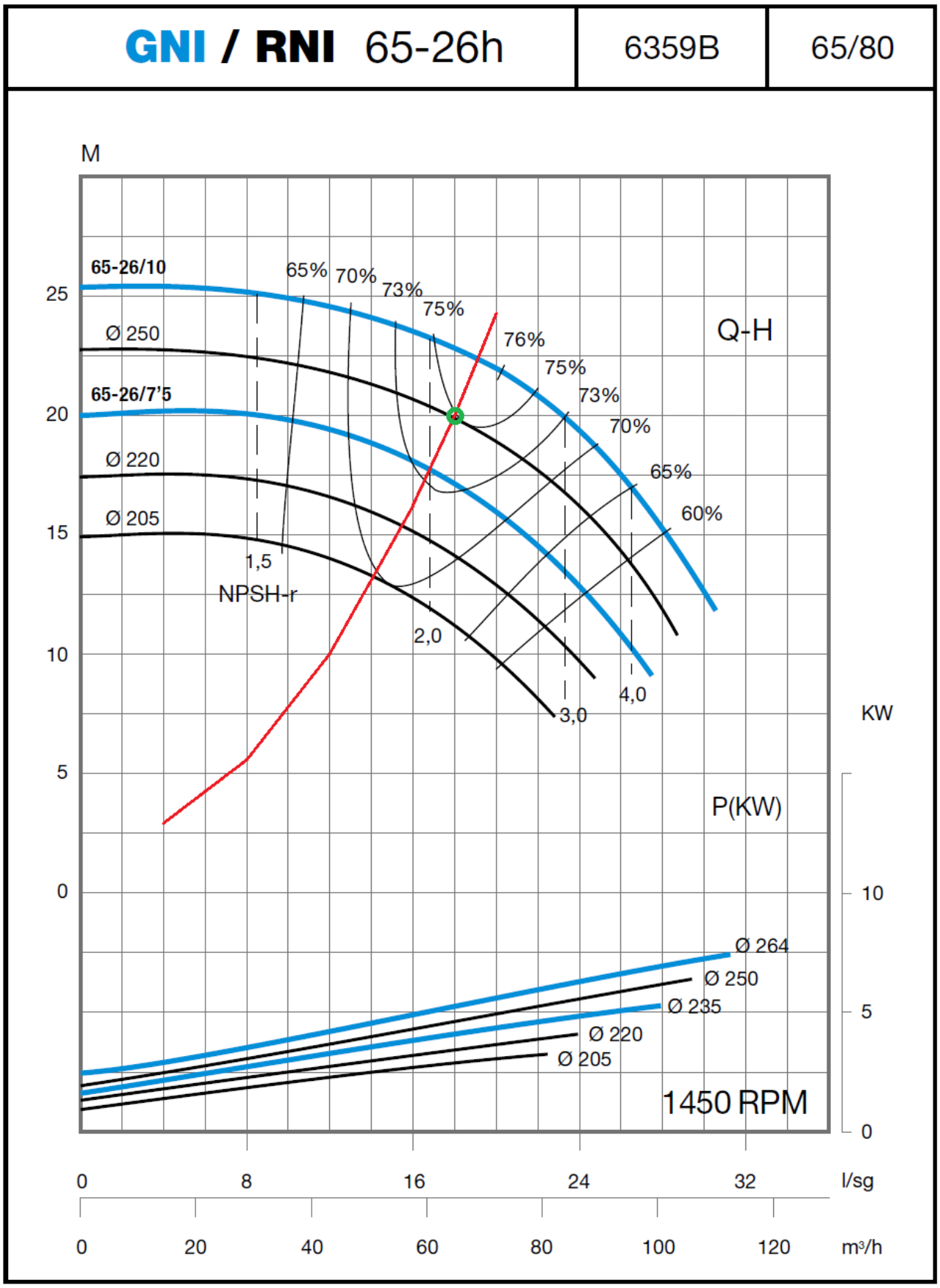


Figura 4.7: Curva característica y de la conducción. Punto de funcionamiento

4.9.4 Bombas en serie y paralelo

En algunos casos puede ser conveniente la colocación de dos bombas en serie en una misma conducción. Ello puede deberse a que no encontramos una bomba que tenga su campo de trabajo en los requerimientos de nuestra instalación, y con la suma de dos en serie conseguimos este funcionamiento, o que dispongamos ya de una bomba y con otra adicional podamos cumplir unos nuevos requerimientos de nuestro sistema, e incluso de coste del equipo de bombeo, que va a funcionar períodos cortos de tiempo que no justifican la amortización de tener una única bomba mucho mayor.

Al colocar dos bombas iguales en serie lo que se obtiene es una nueva curva característica de la bomba equivalente que suma para cada uno de los caudales de la curva característica original, la altura asociada. Es decir para cada caudal obtenemos una altura doble de elevación.

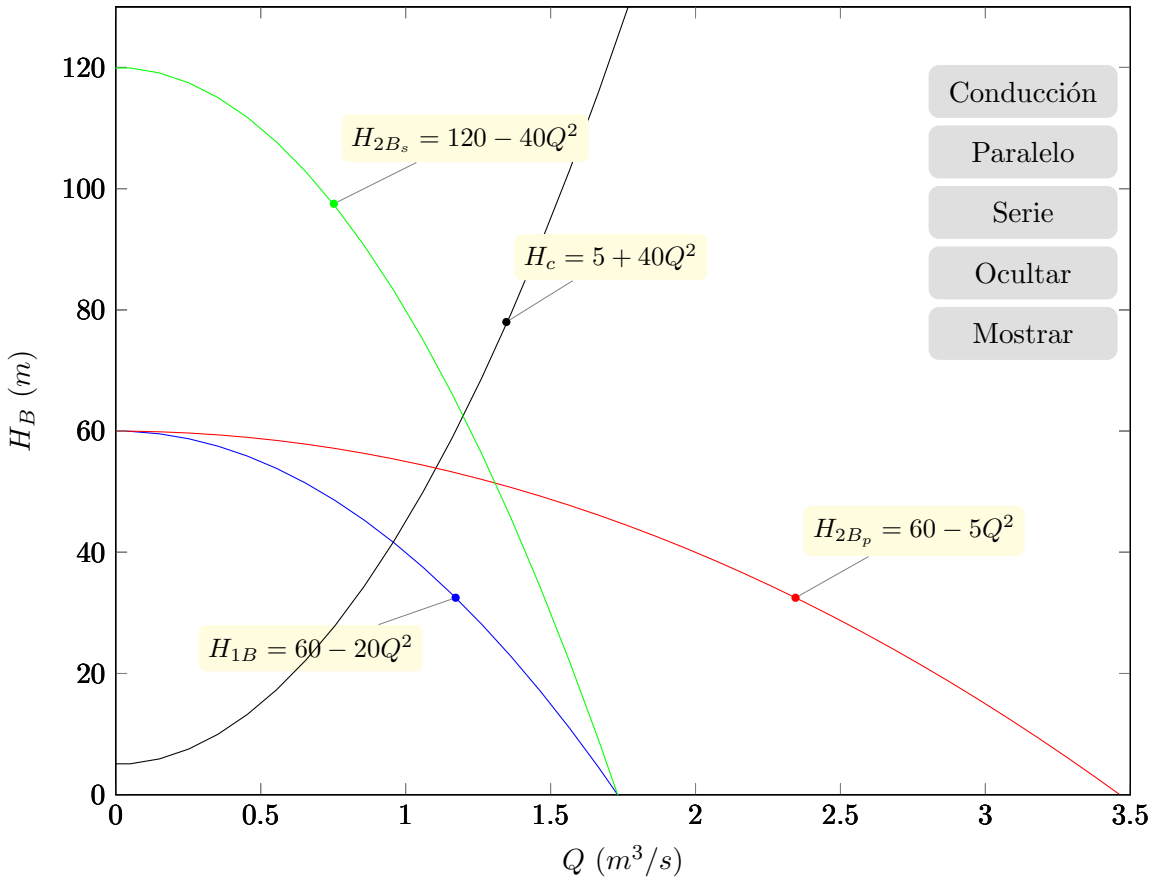


Figura 4.8: Bombas en serie y paralelo

La colocación de bombas en paralelo facilita el obtener un mayor caudal, pero no se consigue una mayor altura de elevación. Esta disposición es muy conveniente cuando los caudales demandados varían con el tiempo. De esta forma podemos tener una bomba trabajando, dos o incluso mas. Si además tenemos un variador de frecuencia en la instalación podremos facilitar todos los caudales intermedios que sean requeridos. Adicionalmente se tiene que en caso de fallo de una de las dos bombas, al menos tendremos otra en funcionamiento para facilitar parte de los caudales.

La curva característica de la bomba equivalente a dos bombas iguales situadas en paralelo se obtiene duplicando el caudal correspondiente a una de las bombas asociado a cada una de las alturas de elevación.

En la figura 4.8 puede verse la curva de una bomba y las correspondientes curvas equivalentes a disposiciones en serie (H_{2B_s}) y paralelo (H_{2B_p}).

Si se dispone de una expresión matemática para la curva característica de una bomba del tipo:

$$H_{1B} = a - b\,Q^2 \tag{4.93}$$

es muy sencillo obtener las expresiones equivalente para n bombas en serie o paralelo resultando:

$$\begin{aligned} H_{nB_s} &= n\left(a - b\,Q^2\right) && \text{para } n \text{ bombas en serie} \\ H_{nB_p} &= a - \frac{b}{n^2}\,Q^2 && \text{para } n \text{ bombas en paralelo} \end{aligned} \tag{4.94}$$

4.9.5 Cavitación en bombas y turbinas

La cavitación en bombas y/o turbinas se define tradicionalmente a través de dos posibles parámetros, el **Número de cavitación** (N_c) o el **NPSH** *'Net Positive Suction Head'*. Ambos se utilizan ampliamente en la literatura y expresan un coeficiente de seguridad que debe aplicarse a las presiones o la energía para que no se produzca cavitación en el interior del aparato en función de la mínima presión o energía que tengamos en sus extremos.

Este concepto no solo es aplicable a bombas o turbinas, sino a cualquier aparato que se sitúe en una conducción. Más adelante puede verse un ejemplo en un venturi.

Estos márgenes se establecen debido a que en los extremos del aparato la velocidad de circulación será la correspondiente a la de la conducción, generalmente conocida o evaluable, mientras que las velocidades en el interior, por ejemplo en los rodetes, son desconocidas. Si estas velocidades interiores son mayores que las de la conducción se produce una disminución de la presión en el interior del aparato, pudiendo llegarse a valores menores que la presión de vapor del fluido circulante, lo que produce la cavitación. Para evitarlo, el fabricante, establece el mínimo número de cavitación o NPSH que requiere el aparato (valor requerido) para su correcto funcionamiento. El proyectista de la instalación deberá obtener el valor del número de cavitación o NPSH asociado al aparato que esté estudiando (valor de diseño), debiendo ser mayor que el requerido por el fabricante.

$$NPSH > NPSH_{req} \tag{4.95}$$

Número de cavitación

Este parámetro adimensional se define como:

$$N_c = \frac{\frac{P_a^*}{\gamma} - \frac{P_v^*}{\gamma}}{\frac{v^2}{2g}} = \frac{P_a^* - P_v^*}{\rho\frac{v^2}{2}} \tag{4.96}$$

siendo:

p_a^*	Presión absoluta en el punto de medida	(Pa)
p_v^*	Presión absoluta de vapor de fluido a temperatura de bombeo	(Pa)
v	Velocidad en la tubería junto al punto de medida	(m/s)
γ	Peso específico del fluido	(N/m^3)

Si se reescribe la ecuación del número de cavitación en la forma:

$$\frac{p_a^*}{\gamma} - \frac{p_v^*}{\gamma} = N_{cd}\frac{v^2}{2g} \tag{4.97}$$

El término de la izquierda expresa la presión absoluta disponible hasta producirse la cavitación. El término de la derecha expresa la conversión de la energía de presión disponible en energía cinética, como la velocidad de circulación en la conducción multiplicada por un coeficiente (número de cavitación) Como el aparato hidráulico considerado puede acelerar la velocidad de las partículas de agua en su interior, el número de cavitación puede interpretarse como el coeficiente de seguridad que hay que aplicar al término de velocidad en la conducción para que no se produzca la cavitación en el interior del elemento hidráulico. Este coeficiente representa el número de veces que puede ampliarse el término de energía cinética en el interior del aparato sin que se produzca cavitación respecto del de la tubería $(v^2/(2g))$.

El fabricante es quien realiza los ensayos para la determinación de este número aplicado al elemento hidráulico que oferta N_{cr} (número de cavitación requerido). La instalación deberá cumplir para su correcto funcionamiento en el punto más desfavorable del elemento hidráulico considerado que:

$$N_{cd} > N_{cr} \quad \rightarrow \quad N_{cd} - N_{cr} > 0 \tag{4.98}$$

NPSH

Este parámetro adimensional se define como:

$$NPSH = H_a - \frac{p_v^*}{\gamma} = \frac{p_a^*}{\gamma} + z - \Delta H_{asp} - \frac{p_v^*}{\gamma} = \frac{p_a^*}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} - \frac{p_v^*}{\gamma} \tag{4.99}$$

siendo:

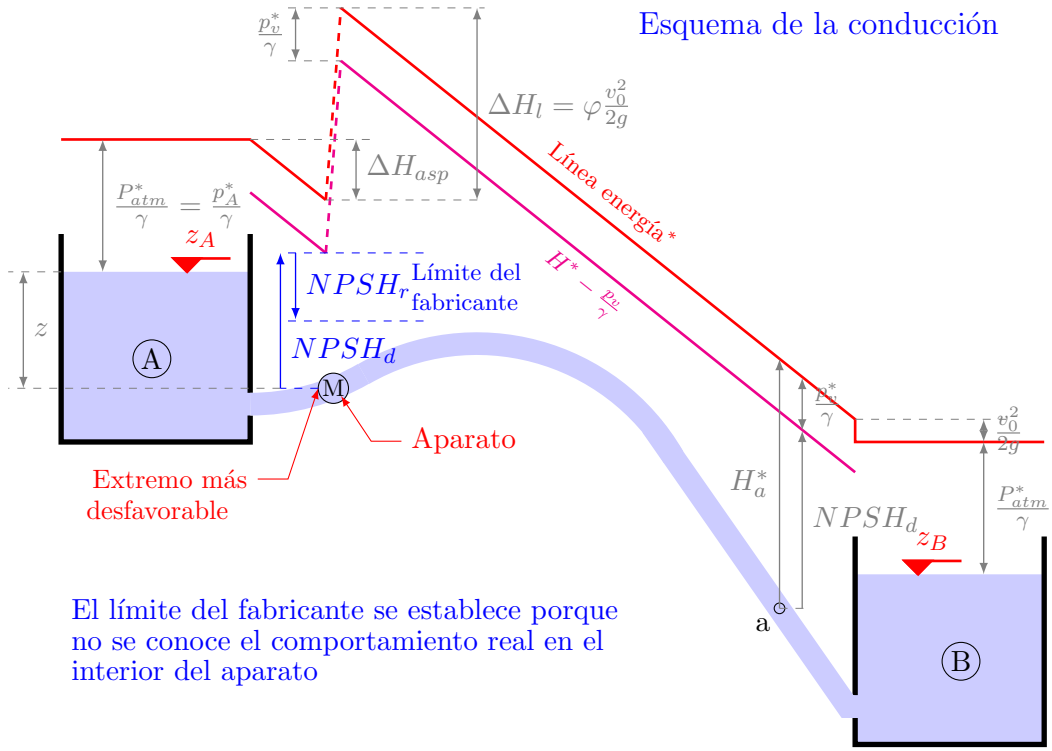


Figura 4.9: Esquema de una conducción para evaluar el NPSH

$\frac{p_a^*}{\gamma}$	Presión absoluta en el punto de estudio	(m)
$\frac{v_a^2}{2g}$	Término de energía cinética en en el punto de estudio	(m)
$\frac{p_v^*}{\gamma}$	Presión absoluta de vapor de fluido a temperatura de bombeo	(m)
H_a	Altura de energía en el punto de estudio	(m)
z	Cota del fluido respecto del eje de aspiración de la máquina	(m)
ΔH_{asp}	pérdida de carga en la aspiración, desde el depósito hasta el eje de aspiración de la máquina	(m)

Supongamos un sistema como el mostrado en la figura 4.9, con un elemento hidráulico (M) que produce una variación de carga localizada. Se dibuja la línea de energía en presión absoluta (línea roja) y se resta la altura correspondiente a la presión de cavitación (línea morada) para la temperatura del fluido en circulación. El NPSH disponible ($NPSH_d$) en cada punto de la conducción viene representado por la distancia desde la conducción a la línea morada. Este valor ha de ser siempre positivo. Si no se conoce la variación de presiones en el interior del elemento hidráulico, el fabricante facilita un NPSH requerido ($NPSH_r$) que representa el margen de seguridad necesario para que no haya cavitación en el interior del aparato. Este margen debe restarse a la línea morada en la brida de aspiración de la bomba, siendo la diferencia hasta el eje de la tubería en dicho punto el NPSH disponible, que deberá ser positivo.

Ejemplo

Número de cavitación y NPSH en un venturi

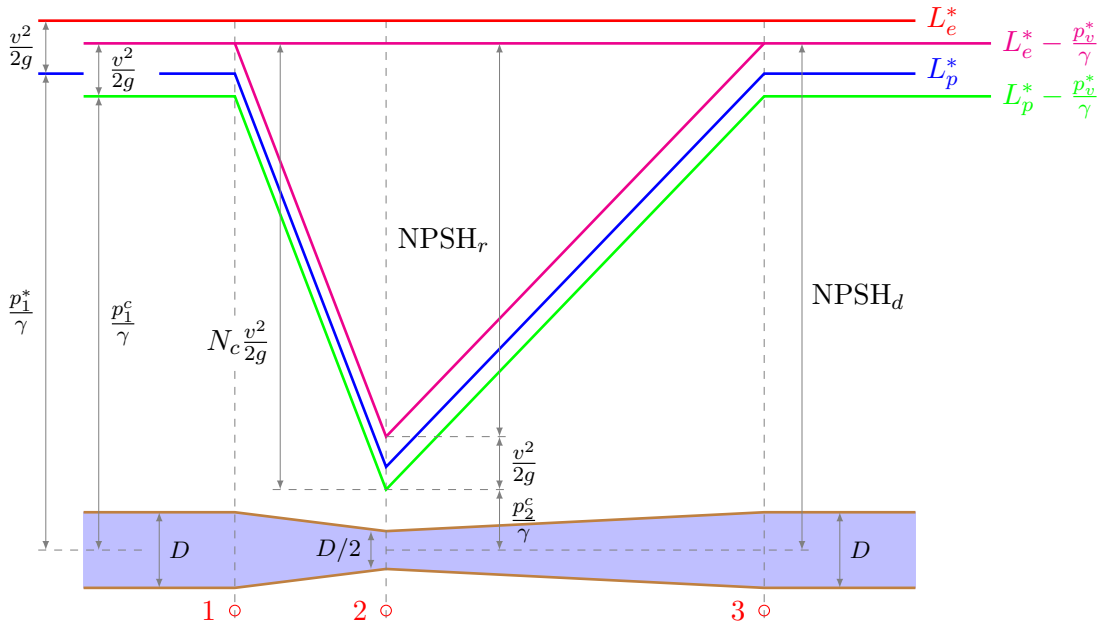


Figura 4.10: Determinación de la cavitación en un Venturi

En una tubería horizontal de diámetro D por la que circula un fluido a velocidad v, se coloca un Venturi con diámetro $D/2$. Obtener el número de cavitación y el NPSH requerido por el fabricante para la zona interior del aparato suponiendo que no hay pérdidas de carga.

Planteando Bernoulli en el Venturi (secciones 1 a 2):

$$z_1 + \frac{p_1^*}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2^*}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} \tag{4.100}$$

Aplicando la ecuación de continuidad:

$$Q = v_1 \cdot S_1 = v_2 \cdot S_2 = v_1 \pi \frac{D_1^2}{4} = v_2 \pi \frac{D_2^2}{4} \quad \rightarrow \quad v_2 = v_1 \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 \tag{4.101}$$

Sustituyendo $D_1 = D$ y $D_2 = D/2$ se obtiene: $v_2 = 4v_1 = 4v$ si denominamos a v la velocidad en la conducción. Entrando en la ecuación 4.100 eliminando los términos de cota (z_1 y z_2) por ser la tubería horizontal y agrupando los términos de presión en un lado y los de energía cinética en el otro:

$$\frac{p_1^* - p_2^*}{\gamma} = \frac{p_1^* - p_v^* - (p_2^* - p_v^*)}{\gamma} = \frac{v^2}{2g} \left(4^2 - 1 \right) = 15 \frac{v^2}{2g} \tag{4.102}$$

resultando el número de cavitación $N_c = 15$. El término $\frac{p^c}{\gamma} = \frac{p^* - p_v^*}{\gamma}$ estaría representando la presión disponible hasta cavitación en la sección considerada.

Nota

Las líneas en el interior del Venturi varían parabólicamente aunque en este caso se hayan representado como líneas rectas

El NPSH de diseño coincidirá con el de las secciones 1 y 3 dado por:

$$NPSH_d = H_1^* - \frac{p_v^*}{\gamma} \tag{4.103}$$

El NPSH requerido deberá reflejar en la sección 2 la disminución de la energía disponible, respecto de la sección 1, para que no se produzca cavitación

$$NPSH_r = (N_c - 1)\,\frac{v^2}{2g} = (N_c - 1)\,\frac{8Q^2}{\pi^2 g D^4} \tag{4.104}$$

Movimiento en lámina libre

VII

7.1 Introducción

En el movimiento en lámina libre existe una condición de contorno expresada en términos de presión que establece el equilibrio entre dos fluido en contacto, normalmente éstos serán agua y aire. Adicionalmente se tiene la condición de contorno de los posibles bordes igual que en las conducciones en presión.

Los problemas en lámina libre están gobernados por la gravedad que es la que hace posible la circulación desde un punto a otro. En las conducciones en presión el fenómeno predominante es la viscosidad.

Otra diferencia es que en las conducciones en presión la variación de ésta en una misma sección transversal entre el punto más alto y más bajo de la conducción no suele considerarse al ser la presión en el punto medio representativa del valor medio de la presión en la sección. Sin embargo, en el movimiento en lámina libre se considera la variación hidrostática de presiones entre la superficie libre y el punto de mayor profundidad.

7.2 Variables y notación

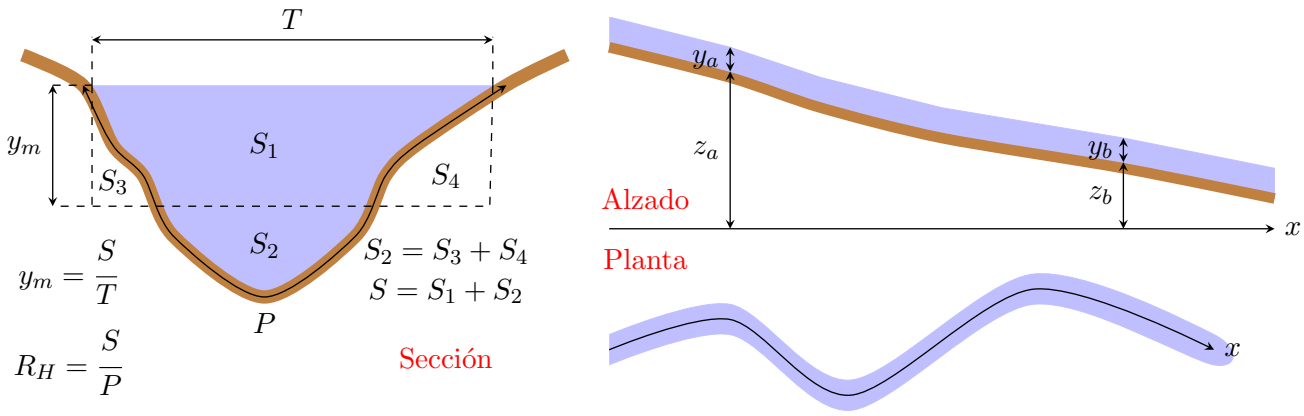


Figura 7.1: Variables y notación en canales

En la figura 7.1 puede verse la notación empleada para el estudio de conducciones en lámina libre, donde:

S	Superficie mojada	(m^2)
P	Perímetro mojado	(m)
T	Ancho de la superficie libre del canal	(m)
R_H	Radio hidráulico	(m)
y_m	Calado medio o calado equivalente a la misma superficie mojada de canal dispuesta en un rectángulo de ancho igual al de la superficie libre en la sección	(m)
y	Calado en en el punto considerado	(m)
z	Cota de la solera del canal respecto de un nivel de referencia	(m)
x	Longitud a lo largo del eje del canal	(m)
I_0	Pendiente de la solera	$(-)$

La pendiente media de la solera entre dos puntos a y b se define como:

$$I_0 = \frac{z_a - z_b}{x_b - x_a} \tag{7.1}$$

Cuando la diferencia de distancia entre las sección tiende a cero, esta pendiente se puede definir como:

$$I_0 = \frac{dz}{dx} \tag{7.2}$$

En la figura 7.2 se muestran algunas de las secciones más habituales en canales y las variables asociadas a cada una de ellas que se describen a continuación:

y	Calado del canal	(m)
b	Ancho de la base del canal	(m)
T	Ancho de la superficie libre del canal	(m)
t	Talud del canal en sección trapezoidal (distancia horizontal por metro de altura de talud)	$(-)$

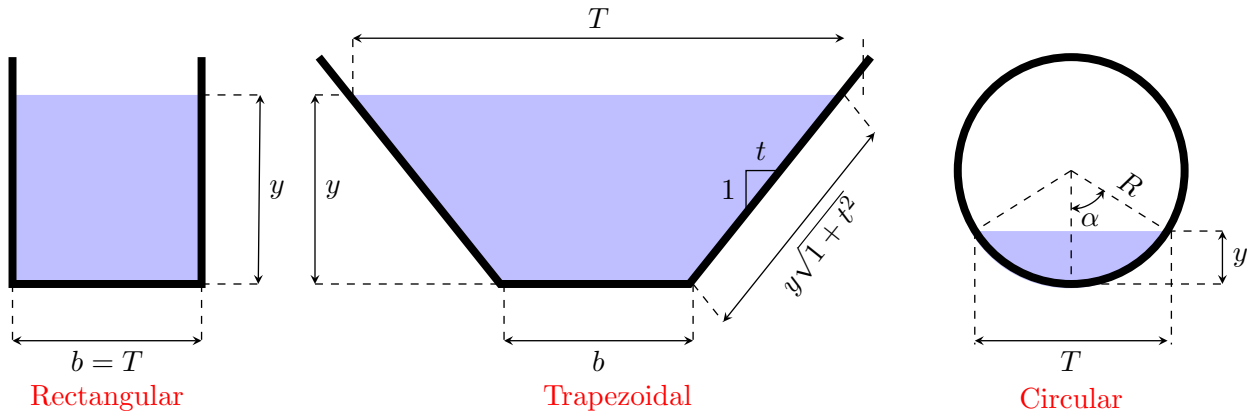


Figura 7.2: Secciones más habituales en canales

7.3 Movimiento en canales

A continuación se va a particularizar la clasificación del movimiento realizada al inicio del capitulo de hidrodinámica para el caso de canales:

7.3.1 Respecto del tipo de movimiento

- Por su variación en el tiempo (en una sección determinada):
  - Régimen permanente: La velocidad en una sección es la misma en todos los instantes. Puede variar de una sección a otra.
  - Régimen variable: La velocidad, en una sección no es constante en el tiempo.

    Dentro de éste podemos tener una subclasificación en:
    - Gradualmente variable: Las variaciones son lentas en en el tiempo no produciendo cambios bruscos en la circulación. Estos casos puede estudiarse como una sucesión de regímenes permanentes en las que cambian las condiciones de caudal o velocidad.
    - Rápidamente variable: El cambio es brusco, produciendo fenómenos transitorios en el canal que no permite su estudio como sucesión de regímenes permanentes.
- Por su variación en el espacio:
  - Régimen uniforme: No hay variación en la cota de la superficie libre (calado) ni de la velocidad cuando nos desplazamos a lo largo del eje longitudinal del canal.
  - Régimen variado: Hay variación en la cota de la superficie libre y/o en la velocidad cuando nos desplazamos a lo largo del eje longitudinal del canal.

    Dentro de éste podemos tener una subclasificación en:
    - Gradualmente variado: La variación en la superficie libre debido a algún cambio en el canal se extienden a lo largo de una distancia relevante en el canal. El estudio de estos fenómenos se realiza mediante las curva de remanso. Se producen variaciones pequeñas y graduales del calado
    - Rápidamente variado: La variación de la superficie libre se realiza en un corto espacio a lo largo del eje longitudinal del canal y es claramente apreciable. Esto pueden ser;
      - Fenómenos locales: Como son los escalones en la solera, los cambios suaves de sección tipo, los cambios en el ancho de sección etc, que se estudian mediante las curvas de energía específica.
      - Resalto hidráulico: Es el cambio que se produce de régimen rápido a régimen lento en el sentido de circulación del flujo en el canal. Se caracteriza por la existencia de un escalón en la superficie libre.
  - Por el tipo de régimen:
    - Laminar: Las partículas se mueven según trayectorias cuasiparalelas.
    - Turbulento: El movimiento es desordenado con una dirección predominante de avance.

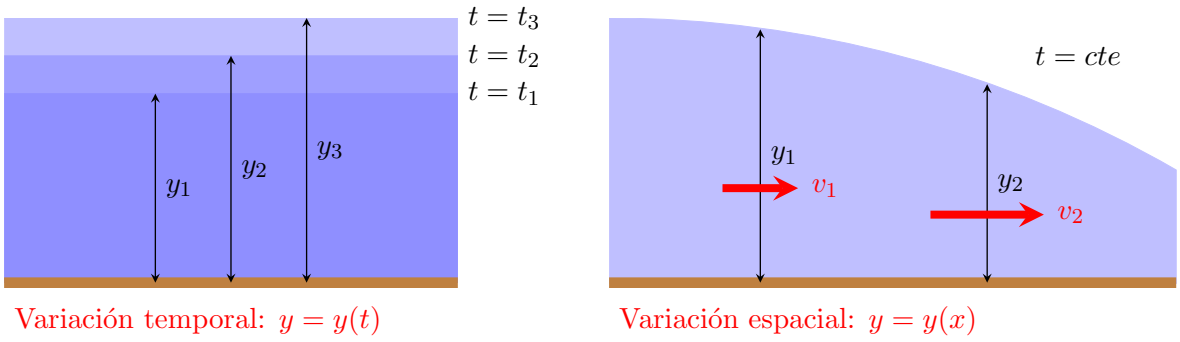
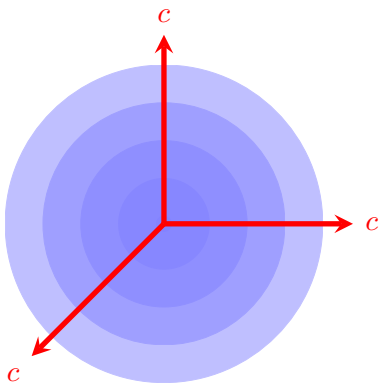


Figura 7.3: Variación en el tiempo y en el espacio

- Por el tipo de circulación:
  - Régimen subcrítico (coloquialmente lento): Cuando el flujo circula con un número de Froude $F < 1$
  - Régimen crítico: Cuando el canal circula con un número de Froude $F = 1$
  - Régimen supercrítico (coloquialmente rápido): Cuando el flujo circula con un número de Froude $F > 1$

7.4 Concepto de régimen aplicado al tipo de circulación

Para comprender el concepto de régimen se va a estudiar el movimiento de una onda superficial infinitesimal que se desplaza con una celeridad c, en todas direcciones, desde el punto donde se produce la perturbación que da origen a esta onda.
Este es el caso de una onda generada por el lanzamiento de una piedra a un estanque.
En este estudio se van a considerar las siguientes hipótesis:



- Solera horizontal: $I_0 = 0$
- Movimiento permanente: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
- Cauce cilíndrico: $\frac{\partial S}{\partial x} = 0$
- No hay pérdida o aportación de caudal en el tramo estudiado: $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$
- Pérdida de carga despreciable: $I = 0$

La celeridad de la onda, en la dirección longitudinal del canal, suele considerarse con las ecuaciones correspondiente a profundidad reducida ($\frac{d}{L} < \frac{1}{2}$, siendo L la longitud de onda y d la profundidad en

la zona de estudio), expresándose como:

$$c = \sqrt{g\frac{S}{T}} \tag{7.3}$$

siendo S la superficie mojada de la sección transversal y T el ancho de lámina libre o espejo de agua del canal.

Si se define el **número de Froude (F)** como la relación entre la velocidad (v) que lleva el canal y la celeridad de la onda superficial infinitesimal (c), se tiene:

$$F = \frac{v}{c} = \frac{v}{\sqrt{g\frac{S}{T}}} \tag{7.4}$$

En el caso particular de canales rectangulares se puede fácilmente obtener:

$$c = \sqrt{g\bar{y}} \tag{7.5}$$

siendo $\bar{y}$ el calado medio del canal.

En la figura 7.4, puede verse la velocidad con que se moverá una onda superficial cuando ésta se produce en un canal que circula con una velocidad v.

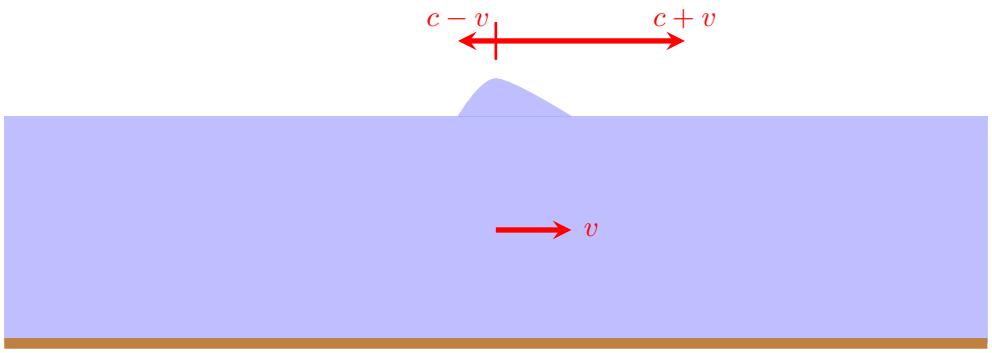


Figura 7.4: Propagación de una perturbación infinitesimal superficial en un canal

Cuando se estudia este movimiento se tienen los tres casos siguientes:

- Régimen subcrítico: $F < 1 \rightarrow c > v$. La onda se desplaza aguas arriba con una velocidad $c - v$
- Régimen crítico: $F = 1 \rightarrow c = v$. La onda se mantiene siempre en el punto donde se produjo la perturbación propagándose hacia aguas abajo.
- Régimen supercrítico: $F > 1 \rightarrow c < v$. La onda no puede desplazarse aguas arriba. El frente aguas arriba se ve arrastrado aguas abajo con una velocidad $v - c$

Este concepto es de la máxima importancia en canales, ya que significa que dada una sección transversal de estudio se verificará que:

- Si el régimen es subcrítico:

  - Las perturbaciones que se produzcan en un punto aguas abajo del punto de estudio afectarán al nivel de la superficie libre en el mismo.
  - Las perturbaciones que se produzcan aguas arriba no afectarán al punto de estudio mientras no se produzca un cambio de régimen que afecte a la zona de estudio.

- Si el régimen es supercrítico:

  - Las perturbaciones que se produzcan en un punto aguas arriba del punto de estudio afectarán al nivel de la superficie libre en el mismo.
  - Las perturbaciones que se produzcan aguas abajo no afectarán al punto de estudio mientras no se produzca un cambio de régimen que afecte a la zona de estudio.

7.5 Ecuaciones

Para poder abordar el movimiento en canales de forma analítica se requieren una serie de simplificaciones que permitan abordar las ecuaciones de Navier-Stokes de forma práctica. Habitualmente vienen considerándose las **Ecuaciones de Saint-Venant** que tienen en cuenta las siguientes hipótesis simplificadoras:

- El flujo se estudia de manera unidimensional: Esto implica que:

  - La velocidad se considera constante en todos los puntos de la sección, y se representa por el valor medio de la misma.
  - La lámina de agua en la dirección transversal al cauce es horizontal. Es decir la lámina de agua no se peralta en las curvas.

- El flujo varia gradualmente. Ello implica que:

  - Las aceleraciones verticales pueden considerarse despreciables.
  - La presión hidrostática prevalece en la sección.

- El eje horizontal es aproximadamente recto. Esto implica que no hay variaciones bruscas en planta que puedan generar peralte en las curvas y/o resaltos cruzados.

- La pendiente del canal es pequeña. No habrá nunca despegue de la lámina de agua.

- No hay socavación en las secciones ($\frac{\partial S}{\partial t} = 0$)

- Puede utilizarse Manning, o una fórmula equivalente, para calcular el rozamiento.

- El fluido es incompresible ($\rho = cte$), lo que hace que se verifique la expresión más sencilla de la ecuación de continuidad.

Con esta hipótesis, y dado que la curvatura del cauce y la superficie libre son moderadas, puede aplicarse la ecuación de continuidad, la de la energía (Bernoulli), y la ecuación de la dinámica deducida para el caso de conductos en presión.

El problema reside en que mientras en conductos las variables a manejar son velocidad v y sección S, ahora deben expresarse estas ecuaciones en términos de calado y y caudal Q

7.5.1 Ecuación de continuidad

La expresión obtenida en los conductos en presión, teniendo en cuenta la incompresibilidad del fluido es:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \tag{7.6}$$

La transformación de esta ecuación para expresarla en términos de y, Q se realiza teniendo en cuenta la relación:

$$\frac{\partial S}{\partial y} = T \tag{7.7}$$

resultando:

$$\frac{\partial S}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial (vS)}{\partial x} = T\frac{\partial y}{\partial t} + S\frac{\partial v}{\partial x} + v\left(\left.\frac{\partial S}{\partial x}\right|_{y=cte} + \frac{\partial S}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\right) =$$
$$T\frac{\partial y}{\partial t} + S\frac{\partial v}{\partial x} + v\left.\frac{\partial S}{\partial x}\right|_{y=cte} + vT\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \tag{7.8}$$

7.5.2 Ecuación de la energía

La ecuación de la energía en conductos viene dada por los tres términos de la ecuación de Bernoulli correspondientes a energía potencial (Z), energía de presión $\left(\frac{P}{\gamma}\right)$ y energía cinética $\left(\frac{v^2}{2g}\right)$, que se expresan como:

$$H = Z + \frac{P}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \tag{7.9}$$

En canales, esta expresión se convierte en:

$$H = Z + y + \frac{v^2}{2g} \tag{7.10}$$

siendo y el calado en la sección de estudio y v la velocidad media en la sección. Tanto y como $\frac{v^2}{2g}$ se miden en la dirección perpendicular a la superficie libre.

Teniendo en cuenta la hipótesis de Saint-Venant de pendiente pequeña, la variación de estas dos medidas entre la vertical y la perpendicular a la superficie libre es despreciable.

Si además se considera la distribución hidrostática de presiones a lo largo de la sección transversal, la energía de una partícula de agua situada a una altura $y' < y$ sobre la solera se corresponde con:

$$H' = y' + \frac{P}{\gamma} \tag{7.11}$$

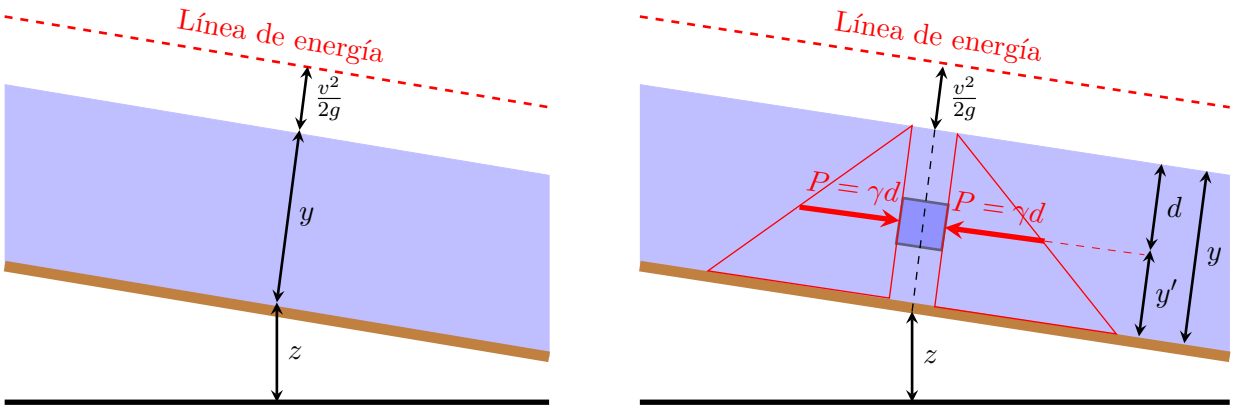


Figura 7.5: Expresión de la ecuación de Bernoulli en canales

donde $P = d\gamma$ siendo d la profundidad medida desde la superficie libre. En este caso resulta que:

$$H' = y' + \frac{P}{\gamma} = y' + d = y \tag{7.12}$$

lo que justifica la forma de la ecuación de Bernoulli adoptada para canales.

7.5.3 Ecuación de la dinámica en canales

La ecuación de la dinámica nos permite obtener la variación de la energía en el paso de una sección a otra.

En la siguiente sección se va a desarrollar la ecuación de la dinámica suponiendo las siguientes hipótesis:

- Movimiento no permanente gradualmente variable.
- Cauce cilíndrico.
- No hay pérdida o aportación de caudal en el tramo estudiado.

Partiendo de la expresión de la ecuación de la dinámica, se tiene:

$$\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{v}{g}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t} = I_0 - I \tag{7.13}$$

Operando separadamente cada uno de los términos:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{Q}{S}\right)}{\partial x} = \frac{1}{S}\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q}{S^2}\left(\left.\frac{\partial S}{\partial x}\right|_{y=cte} + \frac{\partial S}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\right) \tag{7.14}$$

Teniendo en cuenta que:

$$T = \frac{\partial S}{\partial y} \tag{7.15}$$

e introduciendo el concepto de **cauce cilíndrico** como aquel en que la sección (S) se mantiene constante con la distancia (x) siempre que el calado (y) permanezca constante, lo que suele cumplirse en canales. En cauce cilíndrico, se cumplirá:

$$\left.\frac{\partial S}{\partial x}\right|_{y=cte} = 0 \tag{7.16}$$

Introduciendo el valor del multiplicador $\frac{v}{g}$ y las simplificaciones propuestas, se llega a:

$$\frac{v}{g}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{Q}{gS^2}\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q}{\frac{gS^3}{T}}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{Q}{gS^2}\frac{\partial Q}{\partial x} - F^2\frac{\partial y}{\partial x} \tag{7.17}$$

Operando ahora el tercer término de la ecuación (7.13):

$$\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{g}\frac{\partial\left(\frac{Q}{S}\right)}{\partial t} = \frac{1}{gS}\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{Q}{gS^2}\frac{\partial S}{\partial t} \tag{7.18}$$

Teniendo en cuenta la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{7.19}$$

El término dado en la ecuación (7.18) se transforma en:

$$\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{gS}\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{Q}{gS^2}\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{7.20}$$

Resultando:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2Q}{gS^2}\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{F^2}{g}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{1}{gS}\frac{\partial Q}{\partial t} = I_0 - I \tag{7.21}$$

Si se considera movimiento permanente $(\frac{\partial}{\partial t} = 0)$, el primero de los términos de la ecuación anterior se anula, quedando la ecuación de la dinámica como:

$$\left(1 - F^2\right)\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{2Q}{gS^2}\frac{\partial Q}{\partial x} = I_0 - I \tag{7.22}$$

El término $\frac{\partial Q}{\partial x}$ se anula cuando no hay aportaciones o pérdidas de caudal en el tramo estudiado, pudiendo simplificarse la ecuación de la dinámica en:

$$\boxed{\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{I_0 - I}{1 - F^2}} \tag{7.23}$$

7.6 Ecuación de la variación de la cantidad de movimiento

La expresión de la variación de la cantidad de movimiento que va a utilizarse en el cálculo en canales tiene la expresión deducida anteriormente en conducciones de presión:

$$\overrightarrow{N_1} - \overrightarrow{N_2} + \overrightarrow{G} + \overrightarrow{R} = 0 \tag{7.24}$$

siendo $N_i = (\rho_i Q v_i + P_i S_i)\,\overrightarrow{n_i}$ la impulsión de la sección.

Debe tenerse cuidado con el término $P \cdot S$, que en canales representa la fuerza equivalente a la distribución de presiones hidrostáticas en la sección transversal.

Esta ecuación se utilizará para justificar el comportamiento en el resalto hidráulico.

7.7 Régimen uniforme

El régimen uniforme es aquel en que no ha variación en el espacio $\left(\frac{\partial}{\partial x} = 0\right)$. Si además se considera régimen permanente $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$ y cauce cilíndrico, y se utiliza la ecuación de la dinámica dada en (7.23), se llega a:

$$\boxed{I_0 = I} \tag{7.25}$$

Es decir, la pendiente de pérdidas (I) y la pendiente geométrica del canal (I_0) coinciden. Ambas rectas son paralelas.

Si utilizamos como expresión de la pendiente de pérdidas la ecuación de Manning, se tiene:

$$I_0 = I = \frac{n^2 v^2}{R_H^{4/3}} = \frac{n^2 Q^2}{S^2 R_H^{4/3}} = \frac{n^2 Q^2 P^{4/3}}{S^{10/3}} \tag{7.26}$$

En un canal de características geométricas definidas (I_0, n y la sección transversal) por el que pasa un caudal determinado (Q), el único valor desconocido en la ecuación anterior es el calado (y) que forma parte de las expresiones de la superficie y el perímetro mojados ($S(y)$, $P(y)$).

Particularizando para distintas secciones:

- Canal rectangular:

$$I_0 = I = \frac{n^2 Q^2 \,(b + 2y)^{4/3}}{(b\,y)^{10/3}} \tag{7.27}$$

- Canal trapecial:

$$I_0 = I = \frac{n^2 Q^2 \left(b + 2y\sqrt{1 + t^2}\right)^{4/3}}{(b\,y + t\,y^2)^{10/3}} \tag{7.28}$$

- Canal circular:

$$I_0 = I = \frac{n^2 Q^2 \,(2\alpha r)^{4/3}}{[r^2\,(\alpha - \text{ sen } \alpha \cos \alpha)]^{10/3}} \tag{7.29}$$

La dificultad radica en la solución de esta ecuación no lineal en y. La solución será el **calado de régimen uniforme (y_u)**

Nota

Es importante darse cuenta que, para un caudal determinado, el calado uniforme es único, y se corresponde con aquel que hace que las pérdidas de carga continuas ($\Delta H_c = I \cdot L$), que son función de v^2 ó Q^2, igualan a la diferencia de energía potencial resultante de haber descendido la solera del canal una altura dada por $\Delta Z = I_0 L$

7.8 Régimen crítico

Anteriormente se ha definido este régimen como el límite entre el subcrítico y el supercrítico, viniendo esta separación dada por el Número de Froude $F = 1$.

Aplicando esta limitación a un canal:

$$F = \frac{v}{c} = \frac{v}{\sqrt{g\frac{S}{T}}} = 1 \quad \longrightarrow \quad \frac{S}{T} = \frac{v^2}{g} \tag{7.30}$$

o en términos del caudal:

$$\frac{S^3}{T} = \frac{Q^2}{g} \tag{7.31}$$

Para un caudal conocido, se obtendrá un único valor del calado de régimen crítico al que se denominará **calado crítico (y_c)**.

En el caso particular de canal rectangular la solución analítica puede obtenerse como:

$$\frac{b^3 y_c^3}{b} = \frac{Q^2}{g} \quad \longrightarrow \quad y_c = \sqrt[3]{\frac{(Q/b)^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} \tag{7.32}$$

donde q es el **caudal unitario** o caudal por metro de ancho de canal.

Para las secciones trapecial y circular no puede obtenerse una expresión analítica tan sencilla, aunque si se cumplirá la observación siguiente.

Nota

El valor del calado crítico es independiente de la pendiente del canal o del número de Manning, únicamente depende del caudal circulante y del ancho del canal. Ello implica que en un canal donde se mantiene la sección transversal constante el calado crítico no variará con las pendientes

Para un determinado caudal Q, cuando se relacionan los calados uniformes con el crítico se cumple que:

- Si el calado uniforme es mayor que el crítico ($y_u > y_c$) el calado uniforme circulará en régimen lento y la **pendiente es suave**.

- Si el calado uniforme es menor que el crítico ($y_u < y_c$) el calado uniforme circulará en régimen rápido y la **pendiente es fuerte**.

Puede ocurrir que en un determinado tramo de pendiente suave el canal tenga una circulación en régimen supercrítico, y viceversa, pero si el canal mantiene esa pendiente por una longitud tan larga que pueda considerarse indefinida, el régimen rápido no se mantendrá, ya que el canal acabará alcanzando el calado de régimen uniforme.

Nota

Una misma pendiente puede resultar suave con un caudal de circulación y fuerte para otro valor del caudal, lo que cambia el comportamiento del canal

Para un caudal dado, la clasificación de pendientes también puede hacerse atendiendo al valor del número de Froude de acuerdo a:

- $F < 1$ la **pendiente es suave**.
- $F = 1$ la **pendiente es crítica**.
- $F > 1$ la **pendiente es fuerte**.

7.9 Energía específica

Se define la **energía específica (H^0)** del canal como la energía del fluido en circulación. Se corresponde con los términos de presión y energía cinética del trinomio de Bernoulli.

$$H^0 = y + \frac{v^2}{2g} \tag{7.33}$$

En un régimen uniforme este valor permanece constante en el paso entre dos secciones (1 y 2) separadas una distancia L_{12}, mientras que no ocurre así con la energía total, que deberá expresarse como:

$$H_1 = H_2 + IL_{12} \tag{7.34}$$

La conservación de la energía específica se utilizará para la resolución de los problemas de variaciones locales en los que pueda asegurarse la conservación de la misma, o las pérdidas de carga localizadas sean conocidas.

A continuación se estudia la variación de la energía específica con el calado para un caudal de circulación constante:

$$\left.\frac{H^0}{dy}\right|_{Q=cte} = \frac{dy}{dy} + \frac{d\left(\frac{Q^2}{2gS^2}\right)}{dS}\frac{dS}{dy} = 1 - \frac{Q^2}{gS^3}T = 1 - \frac{Q^2}{g\frac{S^3}{T}} = 1 - F^2 \tag{7.35}$$

En el caso particular de régimen crítico, donde se verifica que $F = 1$, resulta que:

$$\left.\frac{H^0}{dy}\right|_{Q=cte} = 0 \tag{7.36}$$

es decir, el valor de la energía especifica tiene un mínimo para el calado correspondiente al régimen crítico.

Para un caudal dado, la curva que representa la energía especifica frente al calado, presenta el mínimo citado y dos valores asintóticos, uno en $y = 0$ y otro en $H^0 = y$, lo que hace fácil su representación.

Por encima del mínimo, se tiene calados mayores que el crítico, lo que corresponde a un régimen subcrítico, mientras que por debajo del mínimo se tendrá régimen supercrítico.

7.10 Curvas de remanso

En régimen permanente gradualmente variado los cambios suaves en las condiciones geométricas del canal, o las perturbaciones que se le realicen al régimen de circulación dan lugar a variaciones graduales en la superficie libre. Estas son las denominadas curvas de remanso.

Su estudio puede llevarse a cabo mediante la ecuación de la dinámica en régimen permanente (7.23). Esta ecuación, para una sección transversal, pendiente y número de Manning constantes con la longitud del canal (x) es integrable directamente al ser únicamente dependiente del calado (y) y la longitud recorrida (x)

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{I_0 - I}{1 - F^2} = \frac{I_0 - \dfrac{n^2 Q^2}{S^2 R_H^{4/3}}}{1 - \dfrac{Q^2 T}{g S^3}} \quad \text{donde:} \quad \begin{cases} S & = S(y) \\ T & = T(y) \\ R_H & = R_H(y) \end{cases} \tag{7.37}$$

Si se sustituye la expresión obtenida en (7.35) para un caudal de circulación constante, y se trabaja con valores incrementales para realizar la integración:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{I_0 - I}{\dfrac{H^0}{\Delta y}} \tag{7.38}$$

se obtiene, al despejar Δx:

$$\Delta x = \frac{\dfrac{H_1^0 - H_2^0}{\Delta y}\Delta y}{I_0 - I} = \frac{H_1^0 - H_2^0}{I_0 - I} \tag{7.39}$$

Otra forma de llegar a esta ecuación es estudiando la variación de energía por unidad de longitud entre dos puntos muy próximos:

$$\frac{\Delta H}{\Delta x} = \frac{z_1 + y_1 + \frac{v_1^2}{2g}}{\Delta x} - \frac{z_2 + y_2 + \frac{v_2^2}{2g} + I_{12}\Delta x}{\Delta x} = \frac{z_1 - z_2}{\Delta x} + \frac{\Delta H^0}{\Delta x} - I_{12} = 0 \tag{7.40}$$

Teniendo en cuenta que: $I_0 = \frac{z_1 - z_2}{\Delta x}$ y despejando Δx, se llega a:

$$\Delta x = -\frac{H_1^0 - H_2^0}{I_0 - I_{12}} = \frac{H_1^0 - H_2^0}{I_{12} - I_0} \tag{7.41}$$

El problema reside en el valor que se le da a la pendiente de pérdidas entre ambos puntos. Puede optarse por la pendiente media de ambas expresada como: $I_{12} = \frac{I_1 + I_2}{2}$, o como $I_{12} = \sqrt{I_1 I_2}$, o por la pendiente de pérdidas del calado medio, expresado en cualquiera de las formas anteriores.

Por tanto, conocida la variación de calado en la que va a situarse nuestra curva de remanso, pueden establecerse intervalos de integración en el calado (Δy), en cada uno de los cuales se podrá obtener la longitud de la curva de remanso correspondiente a ese Δy. La suma de todos los intervalos proporcionará la longitud total de la curva de remanso. Cuanto mayor sea el número de intervalos elegidos, mejor será la precisión final obtenida.

Antes de proceder a aplicar este método de integración van a clasificarse las distintas curvas de remanso, en función del tipo de pendiente, suave (curvas **tipo S**) o fuerte (curvas **tipo F**), y la forma de la curva (1, 2 ó 3). La figura 7.6 muestra esta clasificación:

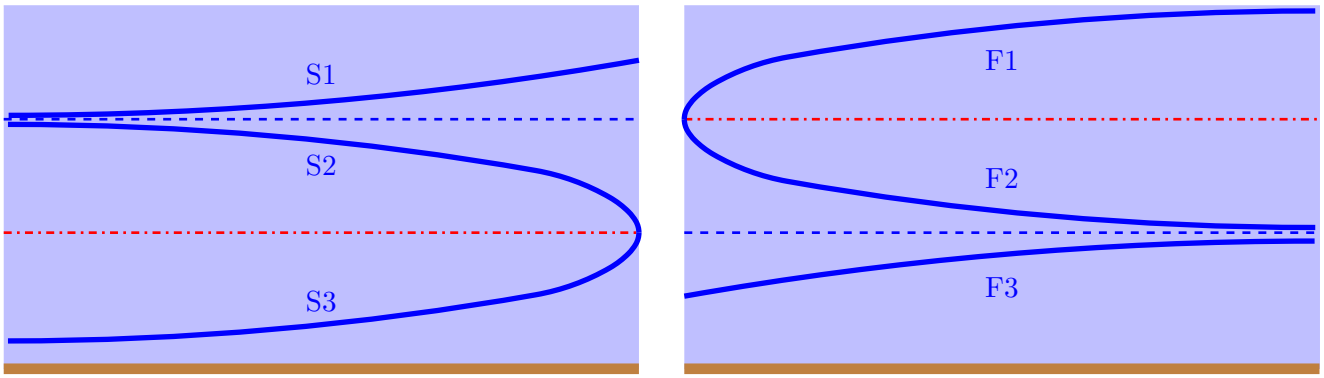


Figura 7.6: Clasificación de los tipos de curvas en pendiente suave (izquierda) y fuerte (derecha)

Es habitual en los textos utilizar la letra **H** cuando la pendiente es horizontal ($I_0 = 0$), **C** para pendiente crítica y **A** para contrapendiente o adversa. Como éstos no son casos habituales o pueden considerarse subcasos de los primeros no se estudian en detalle.

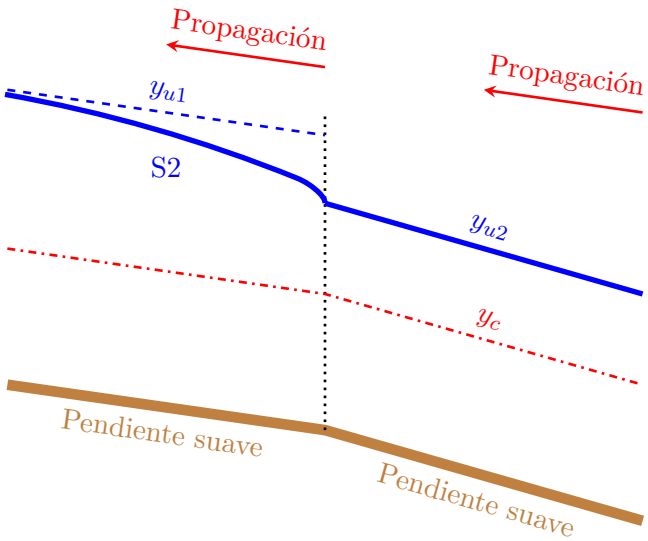
Nota

Los textos anglosajones y algunas traducciones de éstos al español mantienen la nomenclatura S para referirse a las curvas en pendiente fuerte, ellos es debido a la traducción de la palabra steep slope. En ese caso se utiliza la M (mild slope) para la pendiente suave

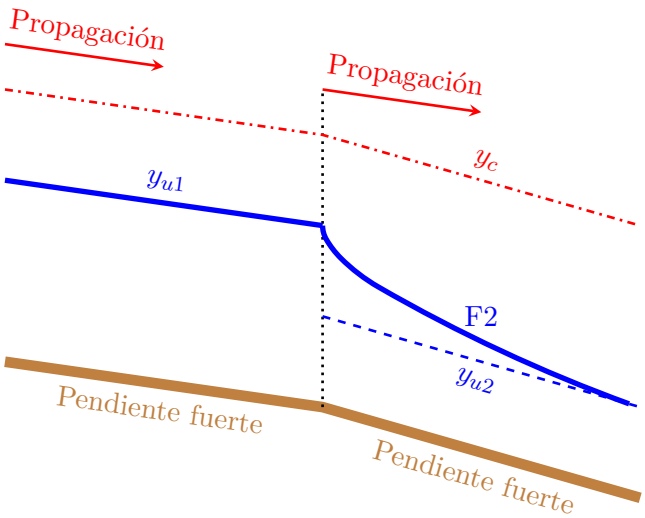
La importancia de la separación entre curvas en pendiente suave y pendiente fuerte radica en que las perturbaciones sean, o no, capaces de avanzar aguas arriba del canal. Esto implica que, supuesta una circulación del canal de izquierda a derecha, las curvas de remanso se propagan de derecha a izquierda en régimen lento, mientras que en régimen rápido se propagan de izquierda a derecha.

Dicho de otra forma, cuando estamos en régimen lento, el control de la superficie libre viene dado desde un punto aguas abajo de la sección de estudio, mientras que en régimen rápido el punto de control se establece aguas arriba del canal.

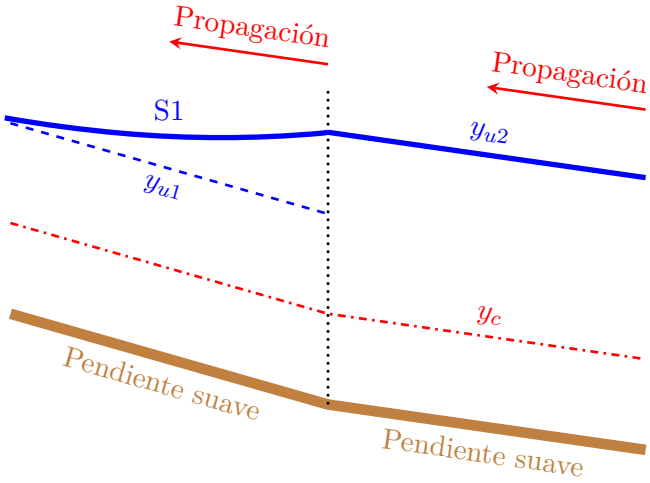
La figura 7.7 muestra las curvas de remanso que se forman entre todas las combinaciones posibles de cambio de pendiente con canal de longitud indefinida a ambos lados de la intersección.



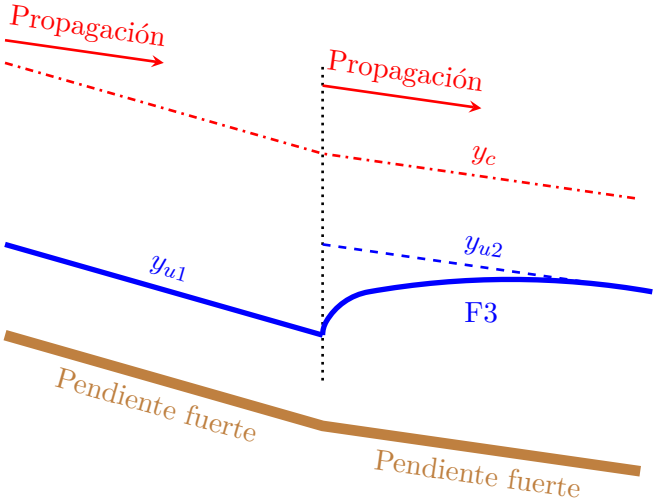
$y_{u1} > yc \rightarrow F < 1$ $y_{u2} > yc \rightarrow F < 1$



$y_{u1} < yc \rightarrow F > 1$ $y_{u2} < yc \rightarrow F > 1$



$y_{u1} > yc \rightarrow F < 1$ $y_{u2} > yc \rightarrow F < 1$



$y_{u1} < yc \rightarrow F > 1$ $y_{u2} < yc \rightarrow F > 1$

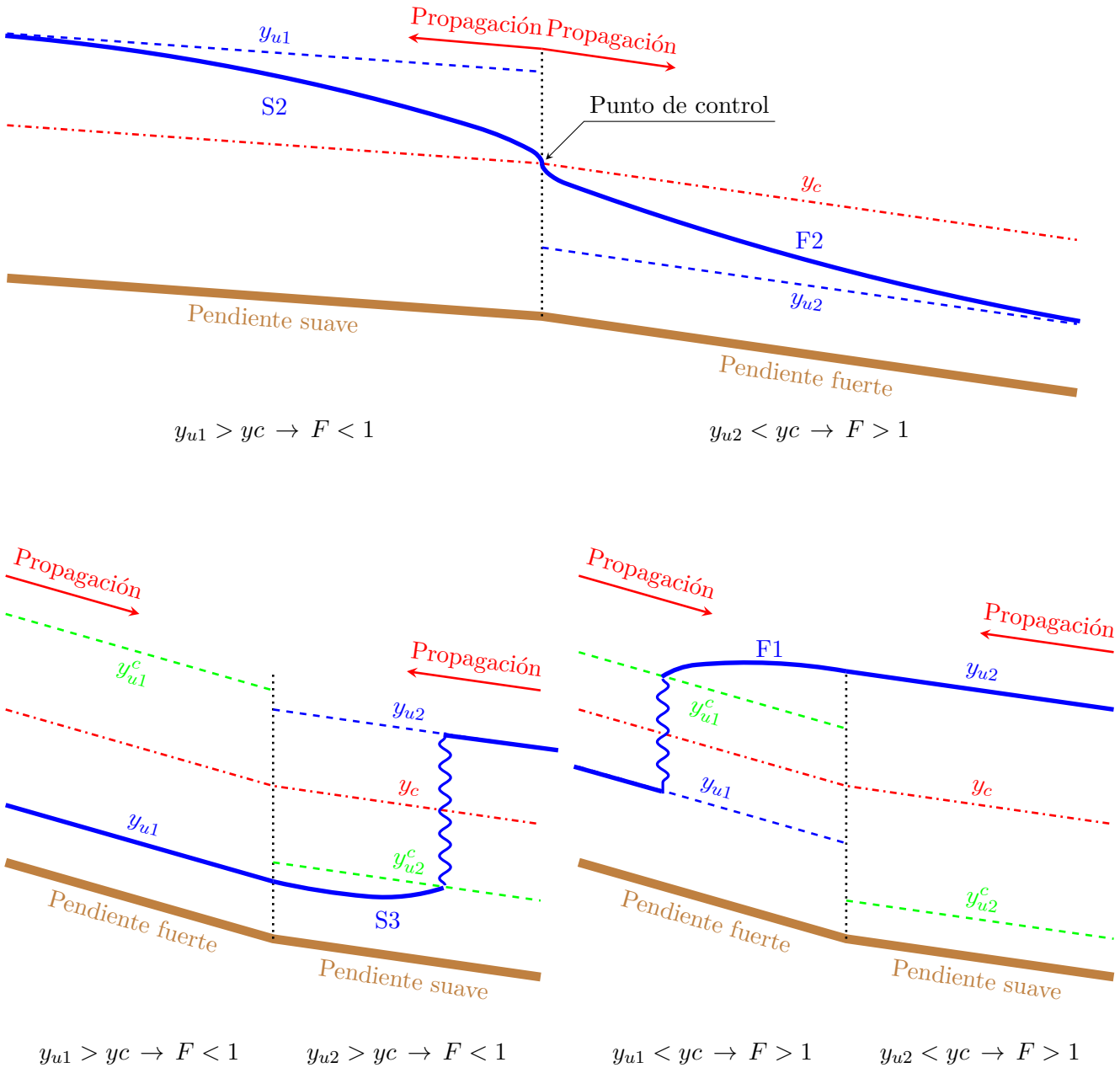


Figura 7.7: Curvas de remanso para diferentes cambios de pendiente

Los gráficos se han realizado manteniendo constante la sección transversal y el caudal. Debido a ello, el calado crítico es el mismo a ambos lados de la intersección.

Cabe destacar la sección de control que se produce cuando pasamos de pendiente suave a fuerte, y la propagación que, en uno y otro sentido se realiza desde este punto. Esto implica que las curvas de remanso $S2$ y $F2$ que se forman en este caso son independientes del valor adoptado por la pendiente a ambos lados mientras estas se conserven como suave y fuerte respectivamente.

Nota

El punto de control, en el que el calado es el crítico (y_c), se produce siempre que hay cambio de régimen lento a rápido según el sentido de circulación

El otro caso, que resulta más complejo, es el correspondiente al paso de régimen rápido a lento. En él se tiene que hay una propagación desde ambos extremos hacia la intersección, siendo la de mayor calado la correspondiente al régimen lento. Ello provoca un "choque" de dos frentes con distinta altura. Este "choque" se resuelve con un resalto, y se da en el punto en que las impulsiones de las secciones a ambos lados del resalto se igualan.

El fenómeno del resalto se estudiará más detalladamente en la sección 7.11. De momento, obsérvese que existen dos posibles soluciones para este problema, una mediante una curva de remanso del tipo $S3$ en la zona de pendiente suave hasta alcanzar el resalto, y la segunda mediante una curva del tipo $F1$ en la zona de pendiente fuerte hasta alcanzar el resalto.

Nota

Igual que en el caso anterior, cuando hay un cambio de régimen rápido a lento según el sentido de circulación del canal, ha de producirse una transición obligatoria que en este caso viene representada por el resalto

7.11 Resalto hidráulico

En la sección de las curva de remanso ya se ha hablado del resalto. Este fenómeno que puede parecer extraño al enfrentar dos frentes fluidos con distinta altura que permanecen fijos en una posición del espacio puede verse en el video adjunto:


Resalto hidráulico en laboratorio

Este otro vídeo muestra este mismo fenómeno en la naturaleza:


Resalto hidráulico en la naturaleza

El resalto es una forma muy buena de disipar energía, siendo habitual que se provoque en el diseño de los vertederos de las presas como forma de conseguir que el caudal restituido al río reduzca su energía lo que puede evitar la socavación de la zona de cimentación de la presa próxima a esta. Este otro vídeo muestra la formación del resalto dentro del cuenco amortiguador de la presa (último elemento del vertedero):


Resalto hidráulico en el interior de un cuenco amortiguador

En este último vídeo, puede verse muy bien cómo el resalto trata de avanzar hacia nosotros, mientras que el régimen rápido del desagüe lo empuja hacia afuera. Tras el resalto lo que se tiene es un régimen lento.

Entre las características del resalto se tienen:

- El régimen es altamente turbulento.
- Se producen pérdidas de carga importantes
- Es altamente inestable especialmente para valores del número de Froude cercanos a 1.
- Se presenta siempre que hay una transición de régimen rápido a lento en la dirección de circulación del canal.

Para el estudio del resalto únicamente se utilizan dos ecuaciones entre las secciones a ambos lados del mismo:

- Continuidad: $v_1 S_1 = v_2 S_2$
- Conservación de la cantidad de movimiento, despreciando el peso ($\overrightarrow{G}$), que es una fuerza cuasi perpendicular al plano de circulación del agua, y las pérdidas por fricción en la solera y cajeros ($\overrightarrow{R}$) al ser una distancia muy corta: $\overrightarrow{N_1} = \overrightarrow{N_2}$

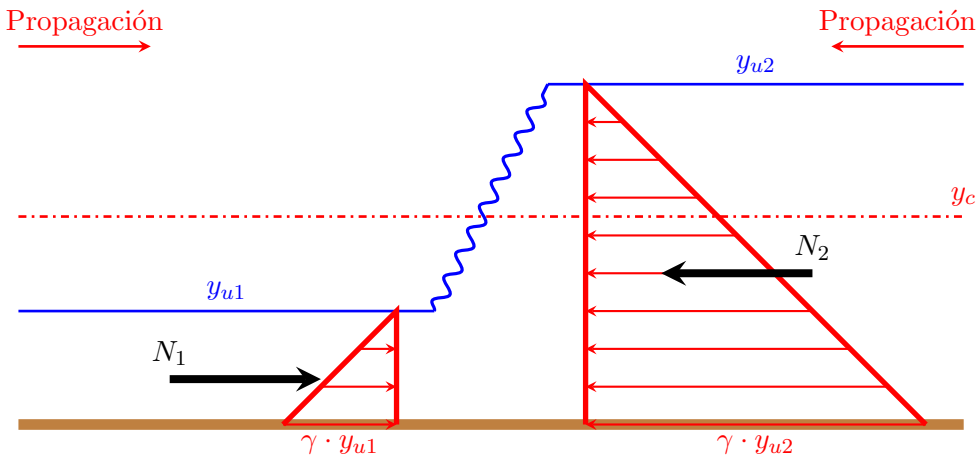


Figura 7.8: Representación de las impulsiones en un resalto

En el caso particular de canal rectangular, el estudio de estas ecuaciones permite obtener una relación de calados que debe cumplirse entre ambos extremos del resalto. La variación de la cantidad de movimiento se va a realizar por metro de anchura de canal, ya que el ancho b no influye al acabar siendo eliminado si se considera el caudal unitario $q = Q/b$

En canal rectangular, la igualdad de impulsiones a ambos lados del resalto puede expresarse como:

$$\overrightarrow{N_1} = \overrightarrow{N_2} \rightarrow \rho q v_1 + \frac{1}{2}\gamma y_1^2 = \rho q v_2 + \frac{1}{2}\gamma y_2^2$$

$$y_1^2 - y_2^2 = \frac{2\rho q}{\gamma}(v_2 - v_1) = \frac{2q^2}{g}\left(\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_1}\right) \rightarrow (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = \frac{2q^2}{g y_1 y_2}(y_1 - y_2)\frac{y_1^2}{y_1^2} \tag{7.42}$$

Simplificando el término $(y_1 - y_2)$ y teniendo en cuenta el valor del número de Froude $F^2 = \frac{q^2}{gy^3}$, la expresión anterior resulta:

$$\frac{y_2}{y_1^2}(y_1 + y_2) = 2\frac{y_1^2}{y_2}F_1^2\frac{y_2}{y_1^2} \rightarrow \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 + \frac{y_2}{y_1} - 2F_1^2 = 0 \tag{7.43}$$

Esta es una ecuación de segundo grado en $\frac{y_2}{y_1}$ cuya solución es:

$$\boxed{\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + 8F_1^2} - 1\right)} \tag{7.44}$$

y que expresa la relación entre los calados conjugados a ambos lados del resalto cuando la sección es rectangular.

También se verifica la relación contraria:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + 8F_2^2} - 1\right) \tag{7.45}$$

En el caso de secciones distinta de la rectangular, la obtención del calado conjugado del uniforme requiere la solución de una ecuación no lineal.

En la figura 7.7 el calado conjugado se ha representado en color verde, y al ser el del uniforme, se ha denominado y_u^c. Las curvas de remanso se han extendido hasta el momento en que las impulsiones se igualan, momento en que se produce el resalto.

La figura 7.9 representa un ejemplo, donde en una pendiente suave se ha provocado la existencia de una circulación en régimen rápido mediante la utilización de una compuerta.

En esta situación el calado uniforme es el lento, que se propaga desde aguas abajo hacia aguas arriba. Sin embargo, tras la compuerta se produce un régimen rápido que se propaga en sentido contrario mediante una curva de remanso del tipo $S3$ buscando el caudal uniforme de régimen lento correspondiente a esta combinación de caudal, pendiente y número de Manning que hacen que la pendiente haya sido calificada como suave.

Si se estudia el valor de la impulsión (N_2) en las secciones 4 y 5 correspondientes al régimen lento esta se mantiene constante ya que no varia ni el calado ni el caudal circulante. Sin embargo en las secciones 1 a 3 la impulsión (N_1) va decreciendo a medida que se recorre la curva $S3$ hasta que se iguala al valor de la impulsión N_2, momento en que se produce el resalto. Este punto coincide en el momento en que la curva $S3$ alcanza la cota del conjugado del calado uniforme de régimen lento.

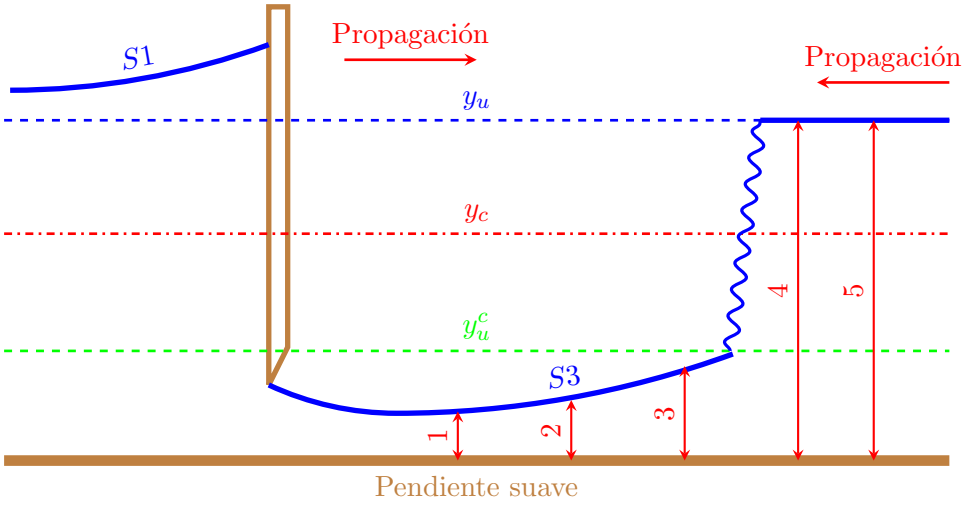


Figura 7.9: Curvas de remanso del tipo $S3$

La impulsión que se obtiene a lo largo de las curvas de remanso disminuye a medida que nos acercamos al calado crítico. Es decir en dos secciones iguales de un mismo canal por las que circula un mismo caudal, la sección que tiene un calado más cercano al crítico tiene una menor impulsión.

Esto explica las dos posibles soluciones mostradas en la figura 7.7 en las que se produce el resalto. En el caso donde aparece la curva del tipo $S3$ en la intersección de pendientes se tiene que el calado uniforme de régimen rápido es menor que el conjugado de régimen lento, por lo que la impulsión de la sección de la izquierda es mayor que la de la de la derecha, por tanto, el agua tiene fuerza suficiente para empujar el régimen lento hacia la derecha. Esta fuerza (impulsión) va disminuyendo a medida que entramos en la zona de pendiente suave hasta que se iguala con la que tiene el régimen lento propagándose hacia aguas arriba, momento en que se produce el resalto.

La segunda de las soluciones es debido a que en la intersección la impulsión correspondiente al valor de calado uniforme de régimen lento (sección de la derecha) es mayor que la del calado uniforme de régimen rápido. Ello puede comprobarse al situarse el calado conjugado del régimen rápido por debajo del uniforme del lento, o de igual manera, por que el calado uniforme de régimen rápido es mayor que el conjugado del uniforme del lento. Ambas condiciones son equivalentes. En este caso se forma una curva de remanso del tipo $F1$ que va disminuyendo su impulsión a medida que se desarrolla hacia la izquierda hasta que iguala la impulsión del régimen rápido en el valor del conjugado del uniforme, momento en que se produce el resalto

7.11.1 Pérdida de energía en el resalto

El estudio, igual que en la determinación de los calados conjugados se realiza para:

- Canal rectangular
- Por metro de ancho de canal, ya que no influye en el resultado final.

El incremento de energía específica entre ambas secciones del resalto es:

$$\Delta H^0 = y_1 + \frac{Q^2}{2gy_1^2} - \left(y_2 + \frac{Q^2}{2gy_2^2}\right) = y_1 - y_2 + \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{y_1^2} - \frac{1}{y_2^2}\right) =$$
$$y_1 - y_2 + \frac{Q^2}{2gy_1^2y_2^2}\frac{y_1}{y_1}\left(y_2^2 - y_1^2\right) = y_1 - y_2 + \frac{F_1^2 y_1}{2y_2^2}\left(y_2^2 - y_1^2\right) \tag{7.46}$$

Teniendo en cuenta la ecuación (7.43) despejada como:

$$2F_1^2 = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 + \frac{y_2}{y_1} \tag{7.47}$$

el incremento de energía específica se transforma en:

$$\Delta H^0 = y_1 - y_2 + \frac{1}{4}\left[\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 \frac{y_1}{y_2^2}y_2^2 + \frac{y_2}{y_1}\frac{y_1}{y_2^2}y_2^2 - \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 \frac{y_1}{y_2^2}y_1^2 - \frac{y_2}{y_1}\frac{y_1}{y_2^2}y_1^2\right] =$$
$$y_1 - y_2 + \frac{1}{4}\left[\frac{y_2^2}{y_1} + y_2 - y_1\frac{y_1^2}{y_2}\right] = y_1 - y_2 + \frac{1}{4y_1y_2}\left[y_2^3 + y_2^2y_1 - y_1^2y_2 - y_1^3\right] =$$
$$\frac{y_2^3 - 3y_2^2y_1 + 3y_1^2y_2 - y_1^3}{4y_1y_2} \tag{7.48}$$

Finalmente se llega a:

$$\boxed{\Delta H^0 = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4y_1y_2}} \tag{7.49}$$

Es decir, la perdida de energía producida en el resalto aumenta con la diferencia entre los calados conjugados.

7.12 Transiciones locales

Las transiciones locales son variaciones en la superficie debido a cambios suaves en el contorno producidos a lo largo de un corto espacio de desarrollo longitudinal del canal.

El estudio de estos fenómenos se lleva a cabo mediante el estudio de las **superficies de energía específica**.

En general, en este tipo de transiciones se supone que la variación en el contorno es tan suave que las pérdidas de carga localizadas asociadas pueden despreciarse. De no ser así, el cálculo analítico es muy complicado y hay que recurrir a la experimentación.

Las superficies de energía representan las tres variables (H^0, Q, y) que se tienen en la ecuación de la energía específica de un canal de sección transversal conocida, dada por:

$$H^0 = y + \frac{Q^2}{2gS^2} \tag{7.50}$$

De nuevo, y por facilidad en la resolución de las ecuaciones va a plantearse el caso particular del canal rectangular, donde la expresión anterior se transforma en:

$$H^0 = y + \frac{q^2}{2gy^2} \tag{7.51}$$

La representación de esta curva en forma tridimensional es complicada. Sin embargo, las curvas que resultan de tomar $H^0 = cte$ y $q = cte$ se aplican para distintos tipos de problema. La figura 7.10 muestra estas dos funciones.

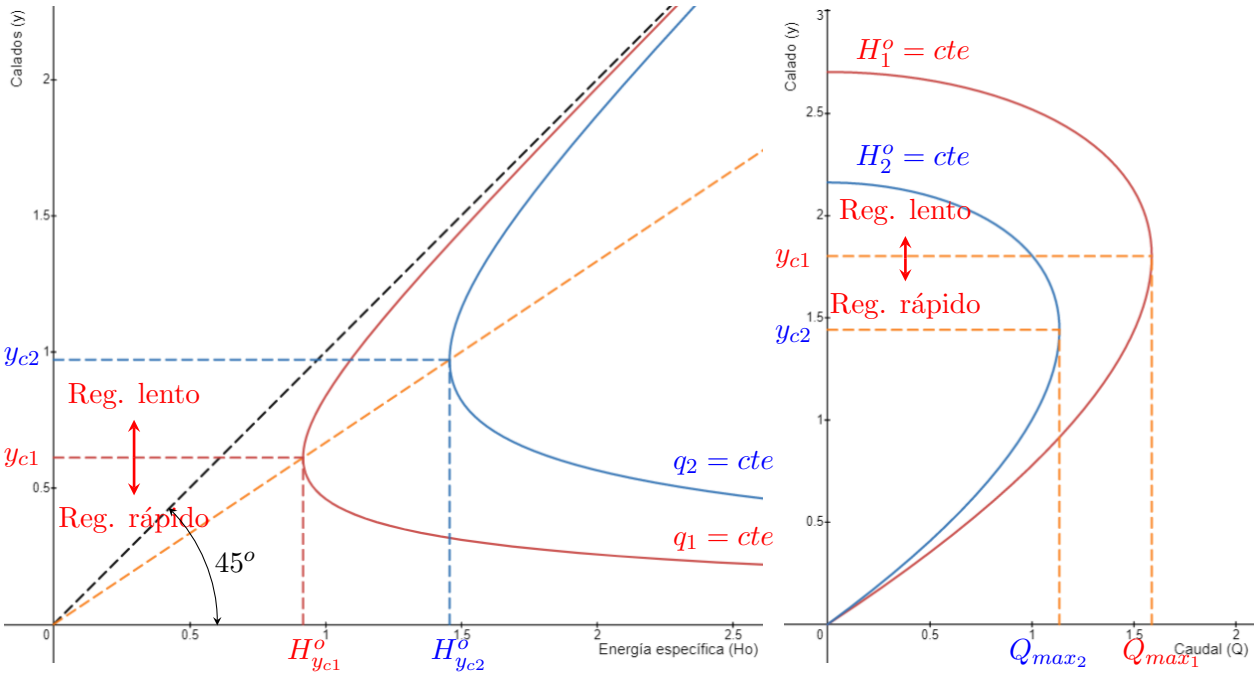


Figura 7.10: Secciones en direcciones perpendiculares de la superficie de energía específica

Ambas pueden descargarse y manipularse mediante DESMOS en los siguientes enlaces:

Curva de energía específica

Curva de Köch

La curva de la izquierda se denomina **curva de energía específica** y representa una curva de caudal constante. Con ella se estudia el comportamiento en régimen permanente de un canal cuando se produce un estrechamiento o ensanchamiento de la sección y un escalón ascendente o descendente de la solera.

La curva de la derecha es la denominada **curva de Köch** y permite estudiar el comportamiento de las obras de toma con superficie libre, es decir el caudal que circulará por un canal conectado a un

depósito que tiene un determinado nivel de agua. Con este tipo de curvas se tiene en consideración, no solo la altura del depósito, sino también las características del canal.

7.12.1 Curva de energía específica

Esta curva se obtiene para un caudal de circulación constante, como ocurre en un canal en régimen uniforme en el que no hay pérdidas o aportaciones de caudal.

En la sección 7.9 se comprobó que la energía especifica mínima correspondía al punto de calado crítico. Calados por encima de este representan un régimen lento, mientras que valores inferiores al crítico son calados de régimen rápido.

La forma de utilización de estas curvas difiere si lo que se esta estudiando es una sobreelevación en solera, un escalón o un cambio en el ancho de sección, además de en el tipo de régimen de circulación asociado. A continuación pasan a estudiarse todos estos casos.

Sobreelevación en solera

La sobreelevación representa un escalón ascendente seguido de otro descendente en la solera en un corto recorrido de canal. Ello produce una perturbación en la superficie libre que difiere dependiendo del tipo de régimen en circulación. El caso más curioso es el mostrado en la figura 7.11 donde la lámina de agua, cuando la circulación en el canal es de régimen lento desciende en el momento en que pasa por el escalón. Este fenómeno se explica claramente cuando estudiamos la curva de energía específica asociada.

La primera idea es que, si estamos en régimen lento, la propagación se realiza desde aguas abajo del canal hacia aguas arriba. La energía específica del fluido disponible para ascender el escalón es:

$$H_3^0 = y_3 + \frac{Q^2}{2gS^2} = y_3 + \frac{q^2}{2gy_3^2} \tag{7.52}$$

que coincidirá con la de la sección 1 si suponemos que no hay pérdidas de carga localizadas.

La figura **??** representa la curva de energía específica para un caudal unitario constante ($q = cte$)

$$H^0 = y + \frac{q^2}{2gy^2} \tag{7.53}$$

En la sección 2, la energía específica será:

$$H_2^0 = y_2 + \frac{q^2}{2gy_2^2} \tag{7.54}$$

En segundo lugar, el agua en el sentido de la propagación deber ser capaz de ascender el escalón sin cambiar de régimen. La relación entre las energías específicas en las secciones 3 y 2 es:

$$H_3^0 = H_2^0 + \Delta Z \tag{7.55}$$

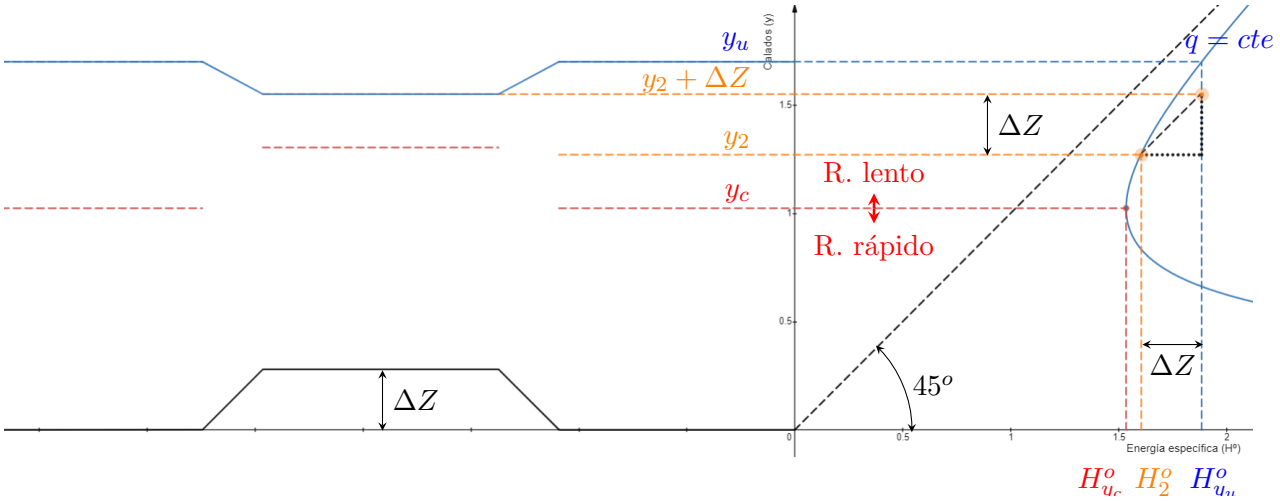


Figura 7.11: Curva de energía específica para sobreelevación en régimen lento

siendo ΔZ el valor del escalón ascendente en el canal.

Por tanto, conocida la energía específica en 3, calculamos la energía específica en 2. Para que no haya cambio de régimen si se representa este valor de H_2^0 sobre la gráfica de energía específica, debemos encontrar que corta a la curva. En caso contrario significa que $H_2^0 < H_{min}^0 = y_c + \frac{q^2}{2gy_c^2}$ (en canales rectangulares se verifica que $H_{min}^0 = \frac{3}{2}y_c$) lo que obliga a un cambio de régimen. Este caso se estudia más adelante.

Suponiendo que no hay cambio de régimen, se obtienen dos calados sobre la curva, el inferior que corresponde a régimen rápido, y el superior que corresponde a régimen lento. Todos los puntos de la curva que están por encima del valor del calado crítico son de régimen lento y los inferiores de régimen rápido.

Si se traza una paralela a la asíntota $H^0 = y$ en el punto donde se obtiene el calado y_2, esta cortará a la vertical de la energía específica en 1 (H_1^0) en un calado $y_2 + \Delta Z$ al ser la asíntota de 45°. Como la curva tiende a la asíntota, el valor del calado en 3 y 1 ($y_1 = y_3$) será mayor que la distancia $y_2 + \Delta Z$ que representa el calado en 2 mas el escalón. Esto explica que la lámina de agua sea más baja en este punto.

No ocurre lo mismo cuando estamos en régimen rápido. La primera diferencia es que la propagación se realiza desde aguas arriba. La segunda es que los valores de calado que se toman en este caso son los correspondientes a régimen rápido, tal y como puede verse en la figura 7.12

En este caso el valor del calado sobre el escalón (y_2) ya es directamente mayor que en la zona sin sobreelevación ($y_1 = y_3$), teniendo además que sumarse el valor del propio escalón (ΔZ) a la altura

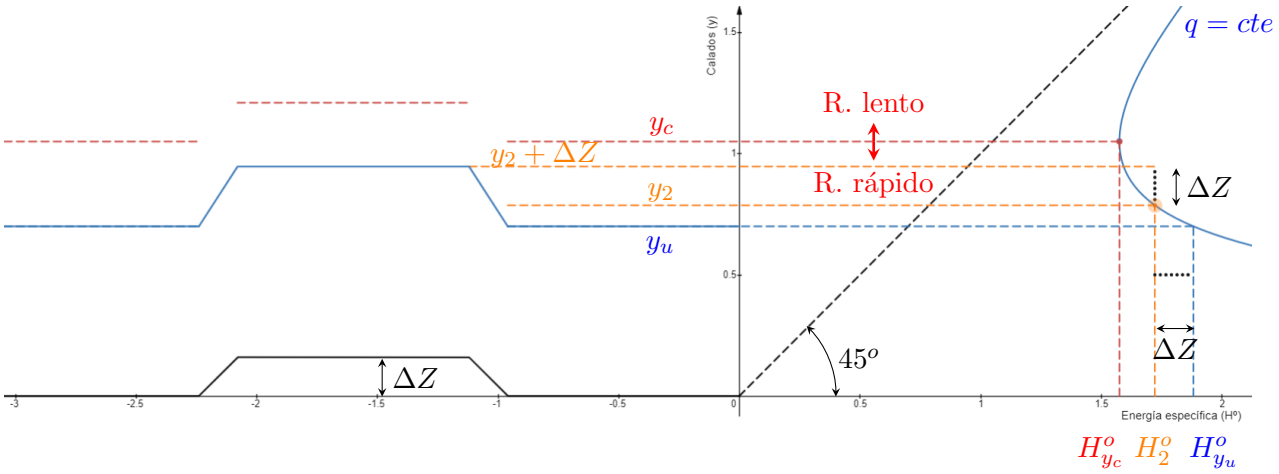


Figura 7.12: Curva de energía específica para sobreelevación en régimen rápido

total.

Escalón ascendente

La figuras 7.13 a 7.15 muestran para régimen rápido y lento el esquema de escalón ascendente. Se tratan todas las posibles soluciones suponiendo que el canal mantiene las características de pendiente y número de Manning a ambos lados del escalón.

En cada uno de los gráficos se relacionan las cotas en el canal con las obtenidas en la curva característica. También se indican los sentidos de propagación que condicionan la forma de la superficie libre.

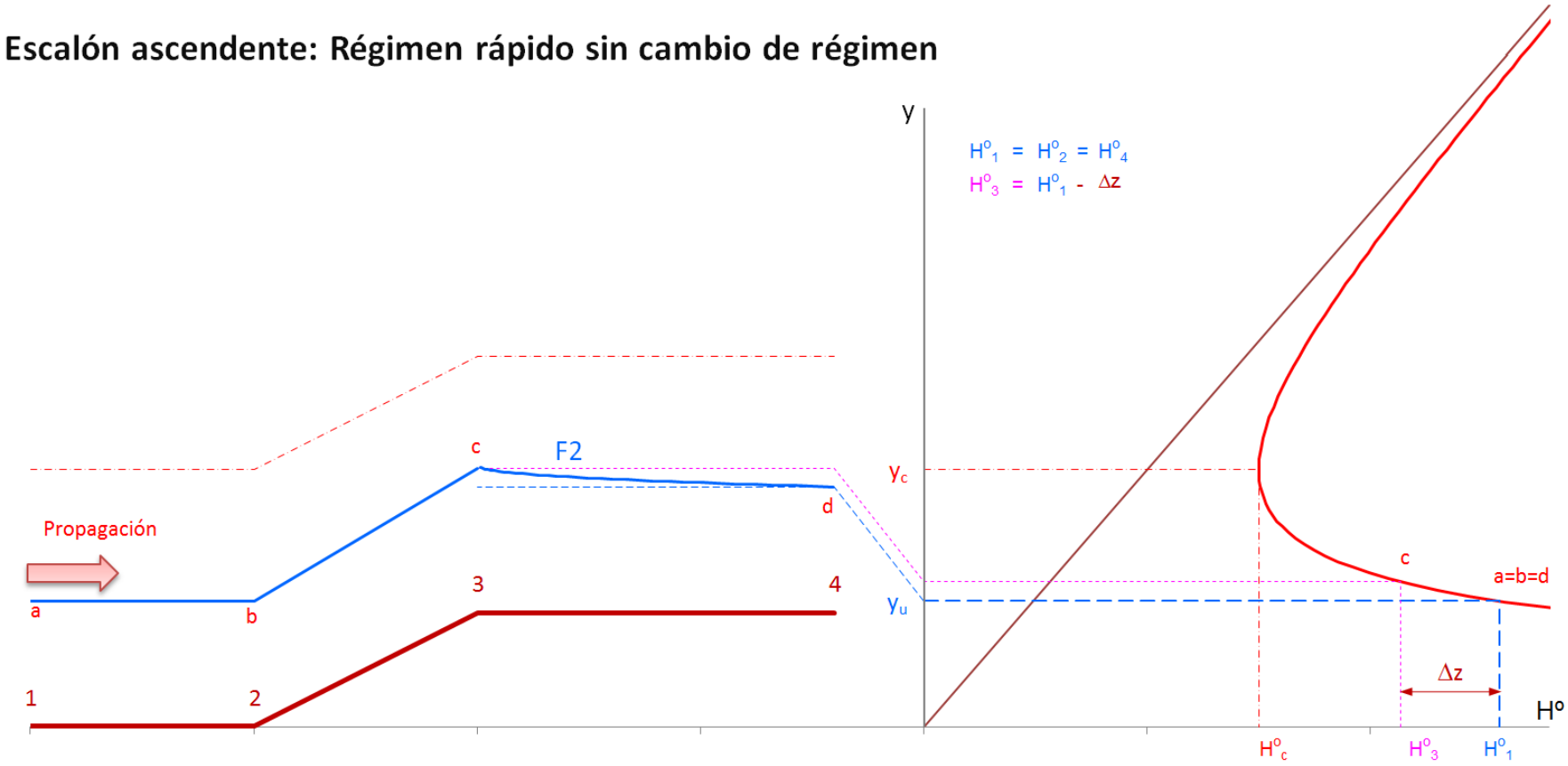


Figura 7.13: Escalón ascendente en régimen rápido sin cambio de régimen

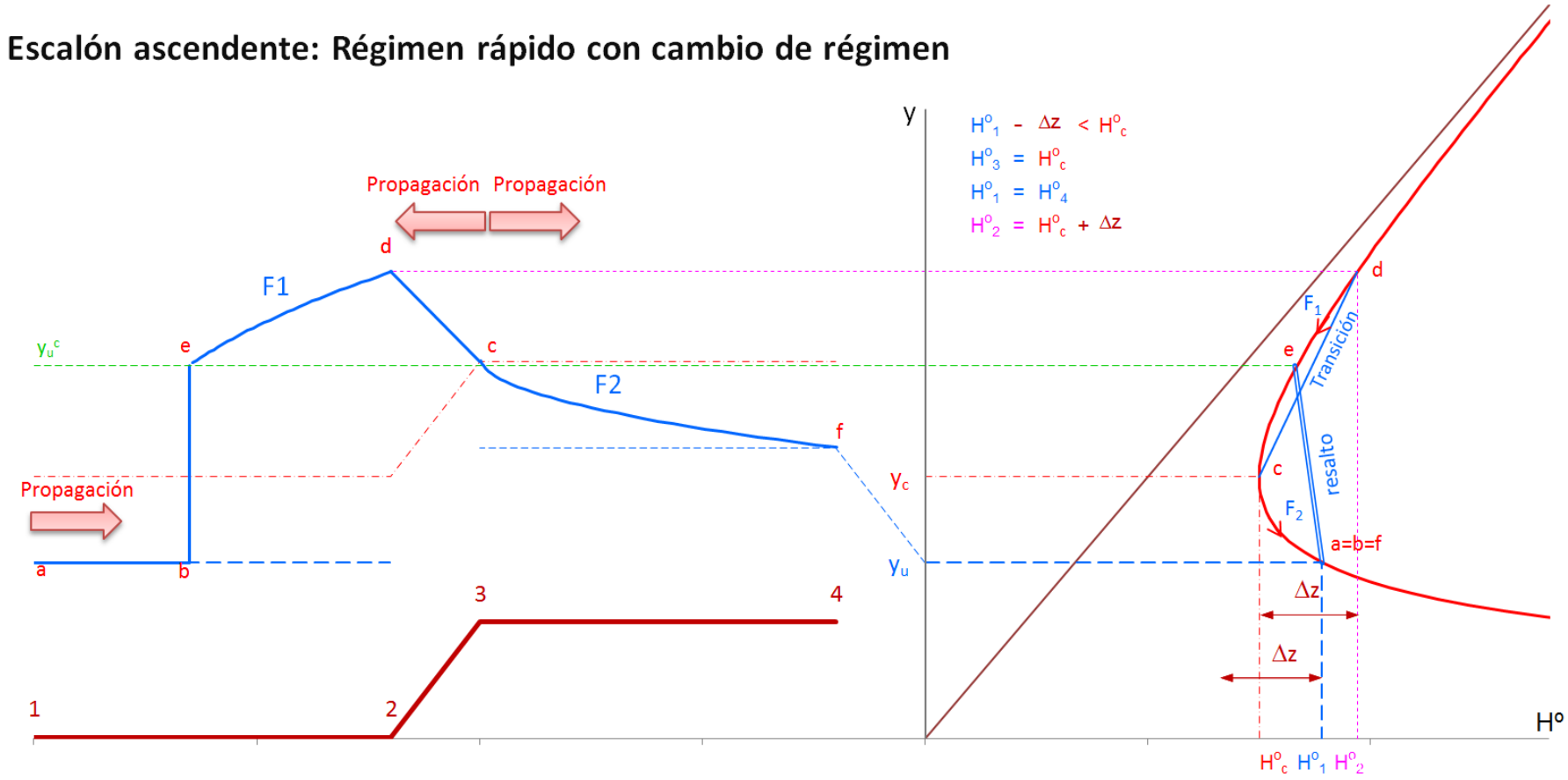


Figura 7.14: Escalón ascendente en régimen rápido con cambio de régimen

El calado que se obtiene en el punto 2 es siempre mayor que el correspondiente al conjugado del calado uniforme de la pendiente 1 a 2, lo que hace que se forme la curva $F1$, y no un resalto en el escalón.

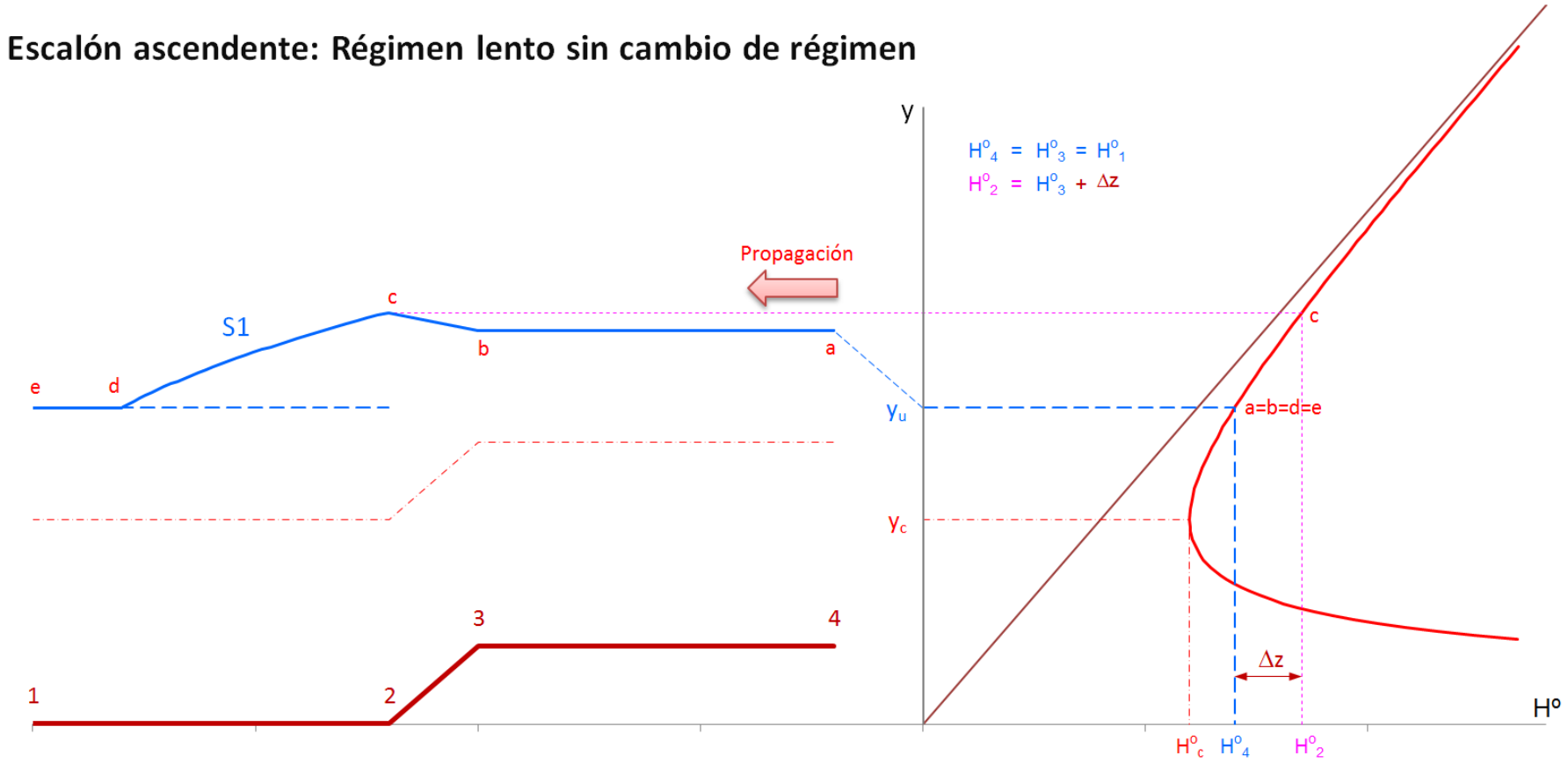


Figura 7.15: Escalón ascendente en régimen lento sin cambio de régimen

El caso de escalón ascendente en régimen lento con cambio de regimen no puede darse ya que al descender el escalón en el sentido de propagación (desde aguas abajo), la energía específica en la parte baja del escalón es mayor que en la parte alta lo que hace que aumente el calado en el lado de la izquierda.

Escalón descendente

La figuras 7.16 a 7.19 muestran para régimen rápido y lento el esquema de escalón descendente. Se tratan todas las posibles soluciones suponiendo que el canal mantiene las características de pendiente y número de Manning a ambos lados del escalón.

En cada uno de los gráficos se relacionan las cotas en el canal con las obtenidas en la curva característica. También se indican los sentidos de propagación que condicionan la forma de la superficie libre.

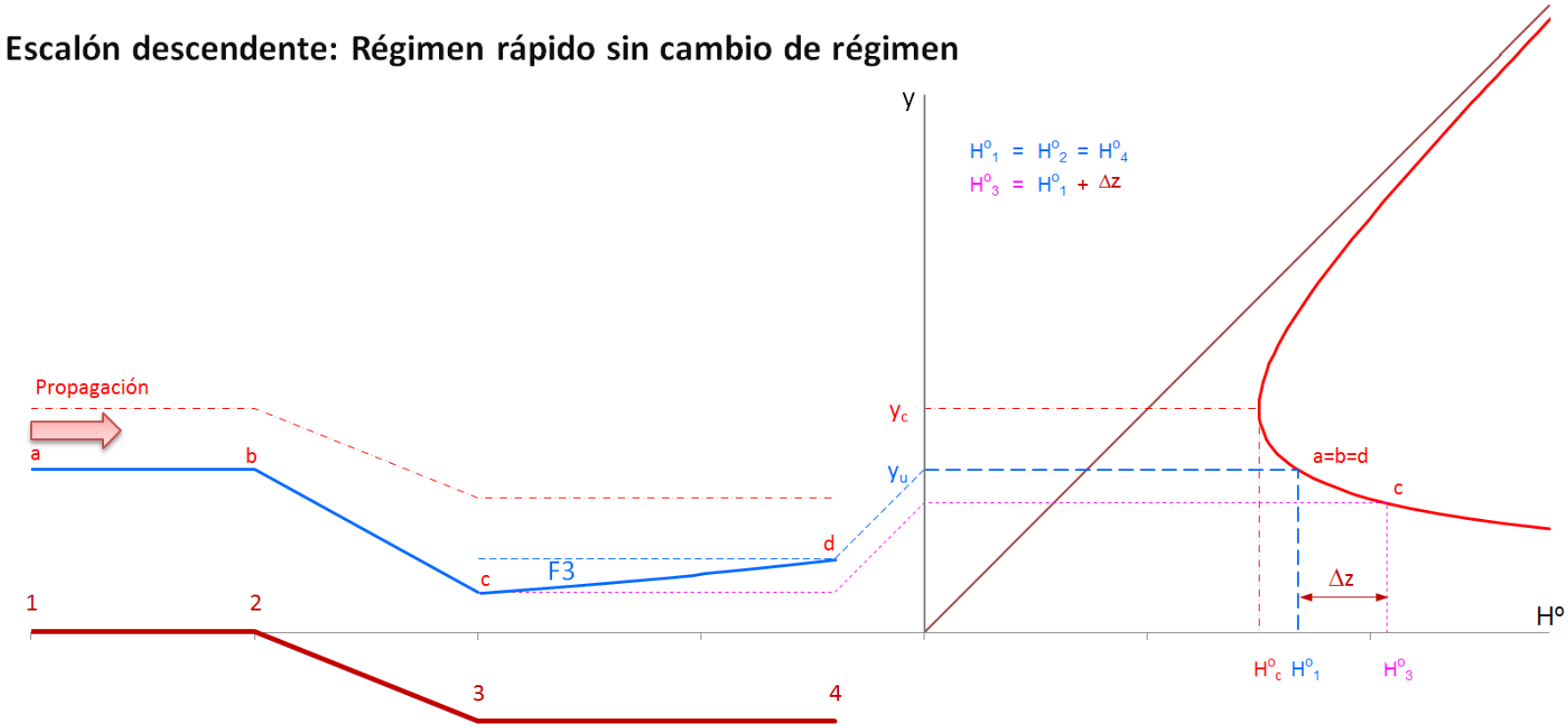


Figura 7.16: Escalón descendente en régimen rápido sin cambio de régimen

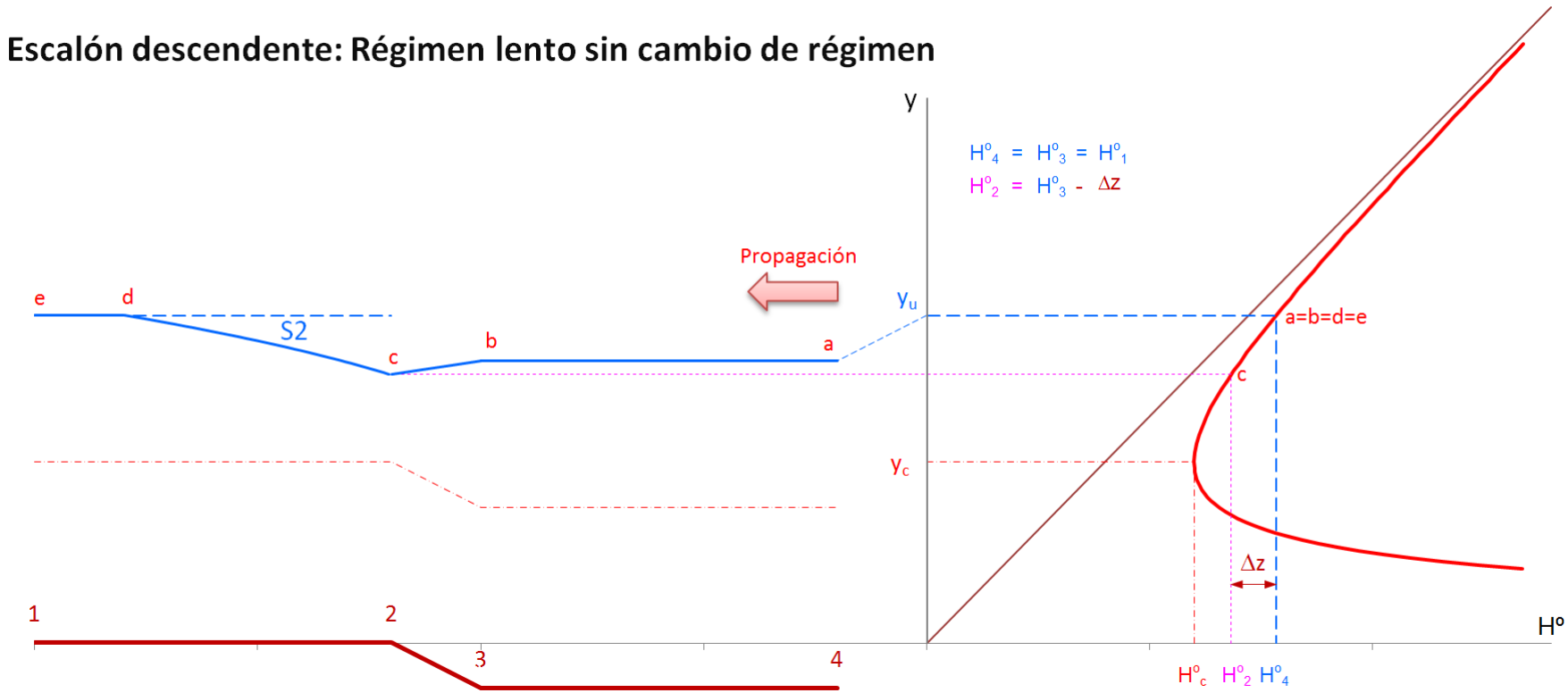


Figura 7.17: Escalón descendente en régimen lento sin cambio de régimen

El caso de escalón descendente en régimen rápido con cambio de regimen no puede darse ya que al descender el escalón en el sentido de propagación la energía específica en la parte baja del escalón es mayor que en la parte alta lo que hace que disminuya el calado en el lado de la izquierda.

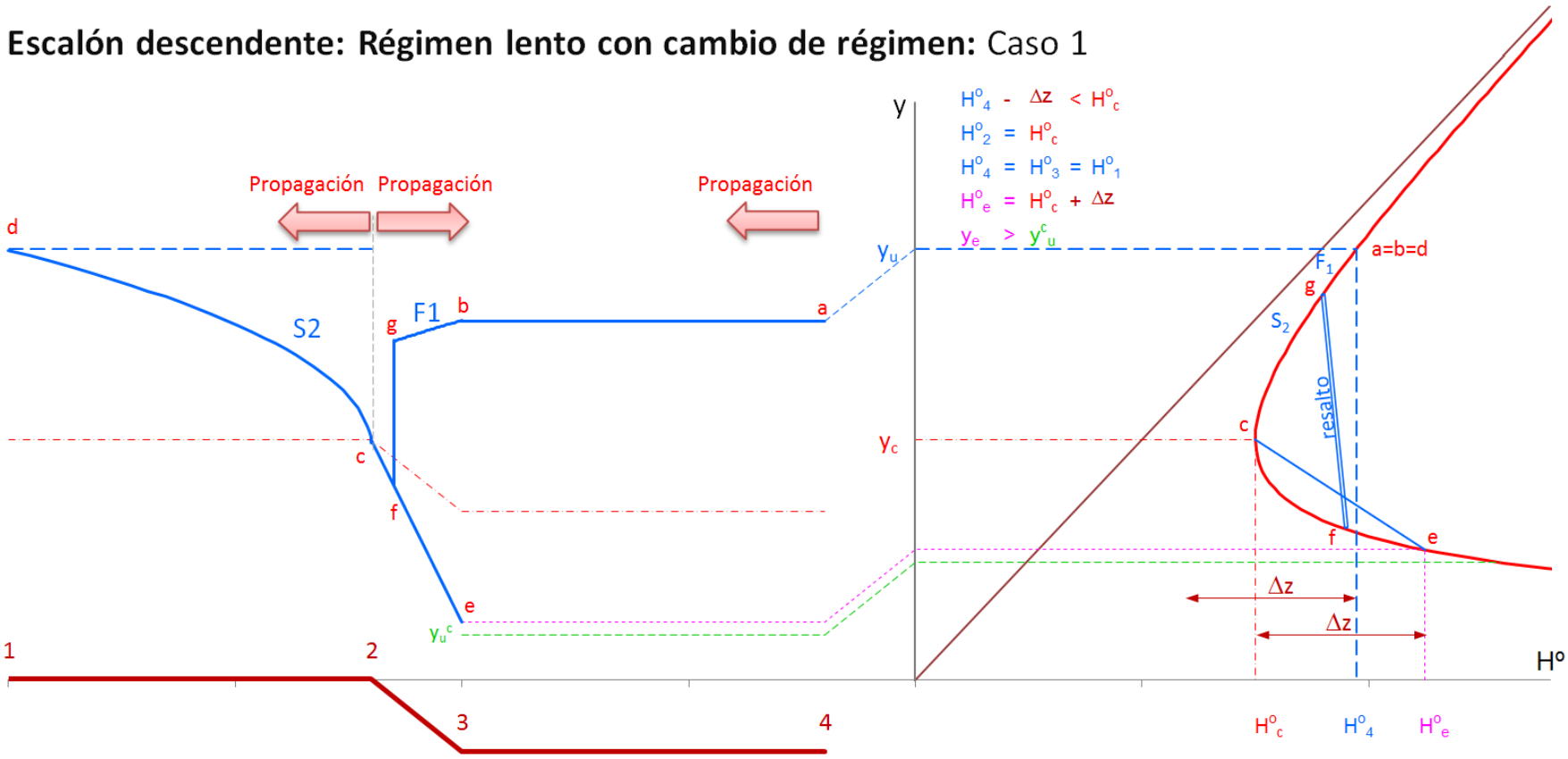


Figura 7.18: Escalón descendente en régimen lento con cambio de régimen. Caso 1

De los dos posibles casos, éste es el correspondiente a la formación del resalto en el escalón. Se identifica claramente porque el calado que se obtiene en el punto 3 al descender el escalón desde el crítico, es mayor que el correspondiente al conjugado del calado uniforme de la pendiente 3 a 4. Se formaría una curva de remanso de tipo $F1$ en el escalón pero no se puede determinar claramente la posición del resalto ya que se supone un escalón pequeño sin pérdidas de carga.

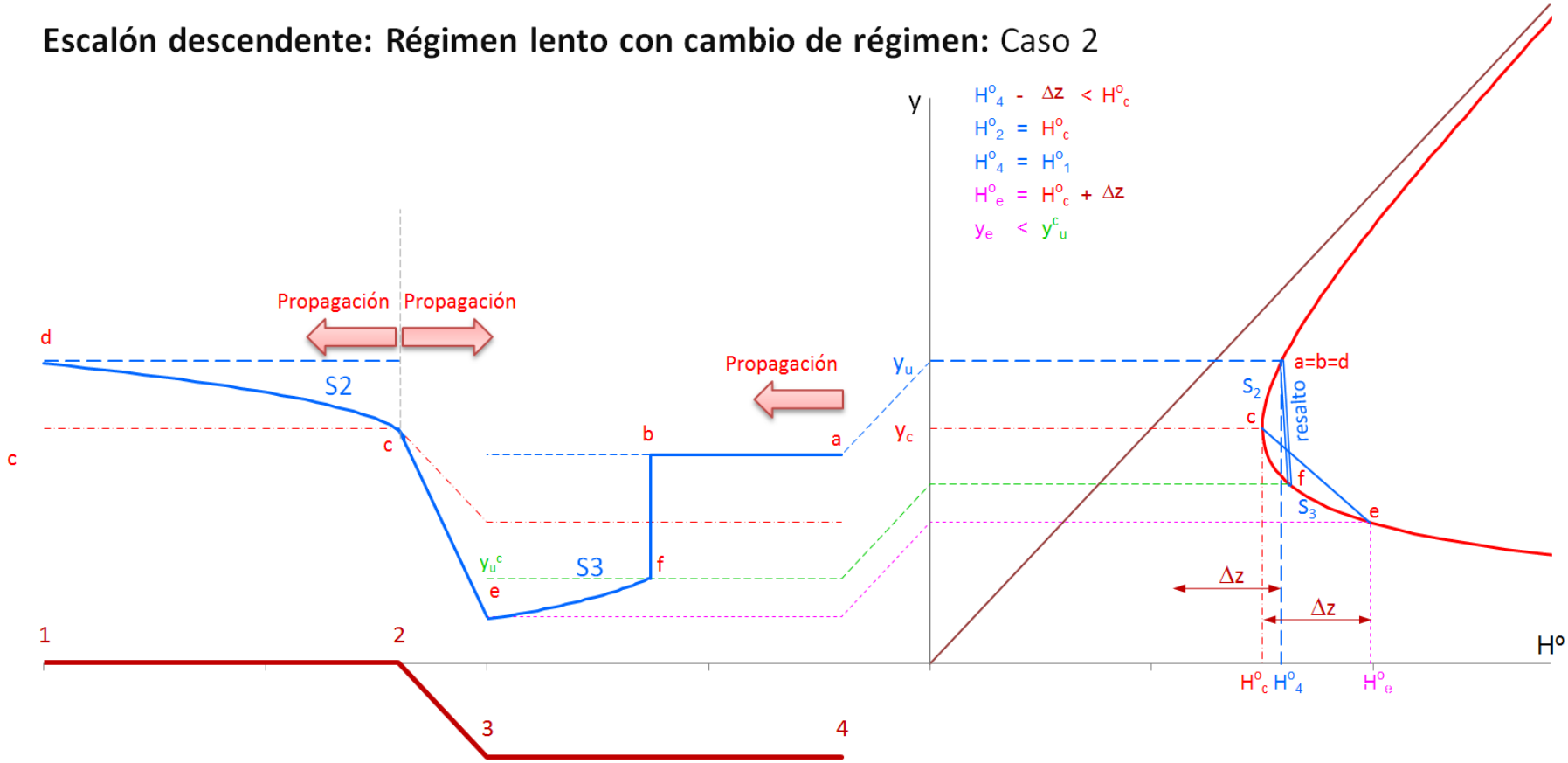


Figura 7.19: Escalón descendente en régimen lento con cambio de régimen. Caso 2

El segundo de los casos es el correspondiente a la formación del resalto fuera del escalón. Se identifica claramente porque el calado que se obtiene en el punto 3 al descender el escalón desde el crítico, es menor que el correspondiente al conjugado del calado uniforme de la pendiente 3 a 4. Se formaría una curva de remanso de tipo $S3$ hasta alcanzar el conjugado del uniforme momento en que se produce el resalto.

Cambios de ancho en canal

La figuras 7.20 a 7.27 muestran para régimen rápido y lento el esquema de estrechamiento y ensanchamiento de un canal. Se tratan todas las posibles soluciones que se puedes estudiar analíticamente suponiendo que el canal mantiene las características de pendiente y número de Manning a ambos lados del escalón. La transición debe ser lo suficiente suave y corta para que no se produzcan pérdidas de carga localizadas y que las continuas sean despreciables.

Para poder manejar este tipo de problemas se representan las curvas de caudal unitario q_1 y q_2 constantes. Los cambios se producen entre ambas curvas.

Obsérvese que la curva correspondiente a la parte estrecha es la que se sitúa en el interior. También puede verse que el calado de régimen crítico es mayor en la curva interior. Ello es lógico teniendo en cuenta la relación que existe en canal rectangular entre el calado crítico y la energía correspondiente a este calado $H_c^0 = \frac{3}{2} y_c$ que hace que los puntos de energía específica minima para distintos caudales unitarios se encuentren sobre una recta.

En cada uno de los gráficos se relacionan las cotas en el canal con las obtenidas en la curva característica. También se indican los sentidos de propagación que condicionan la forma de la superficie libre.

Los datos utilizados para generar cada uno de los gráficos se adjuntas en cada una de las figuras. Asimismo los valores de las energías específicas correspondientes a calado uniforme y crítico, y todos los calados involucrados en el problema se facilitan en el gráfico.

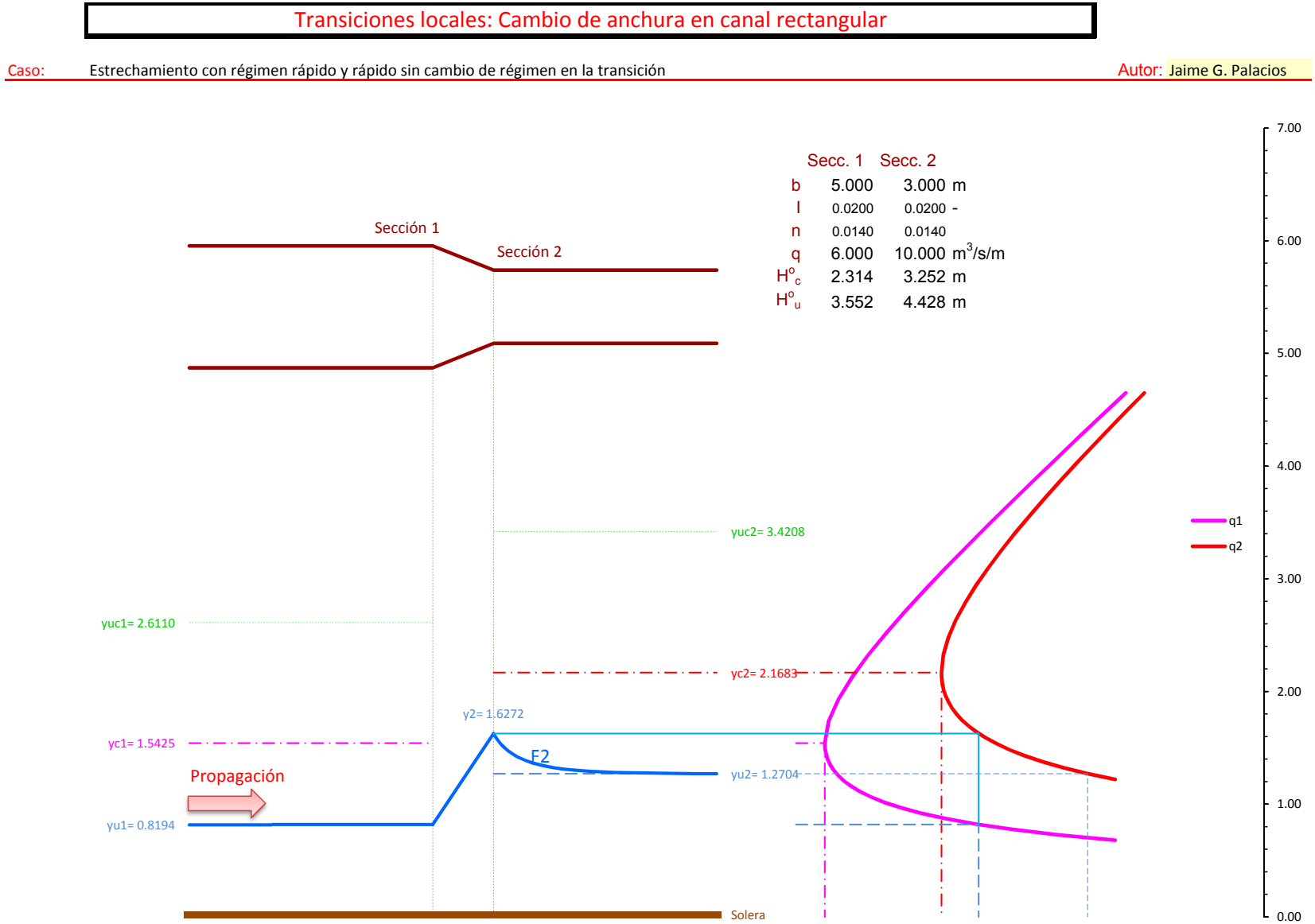


Figura 7.20: Estrechamiento en régimen rápido sin cambio de régimen

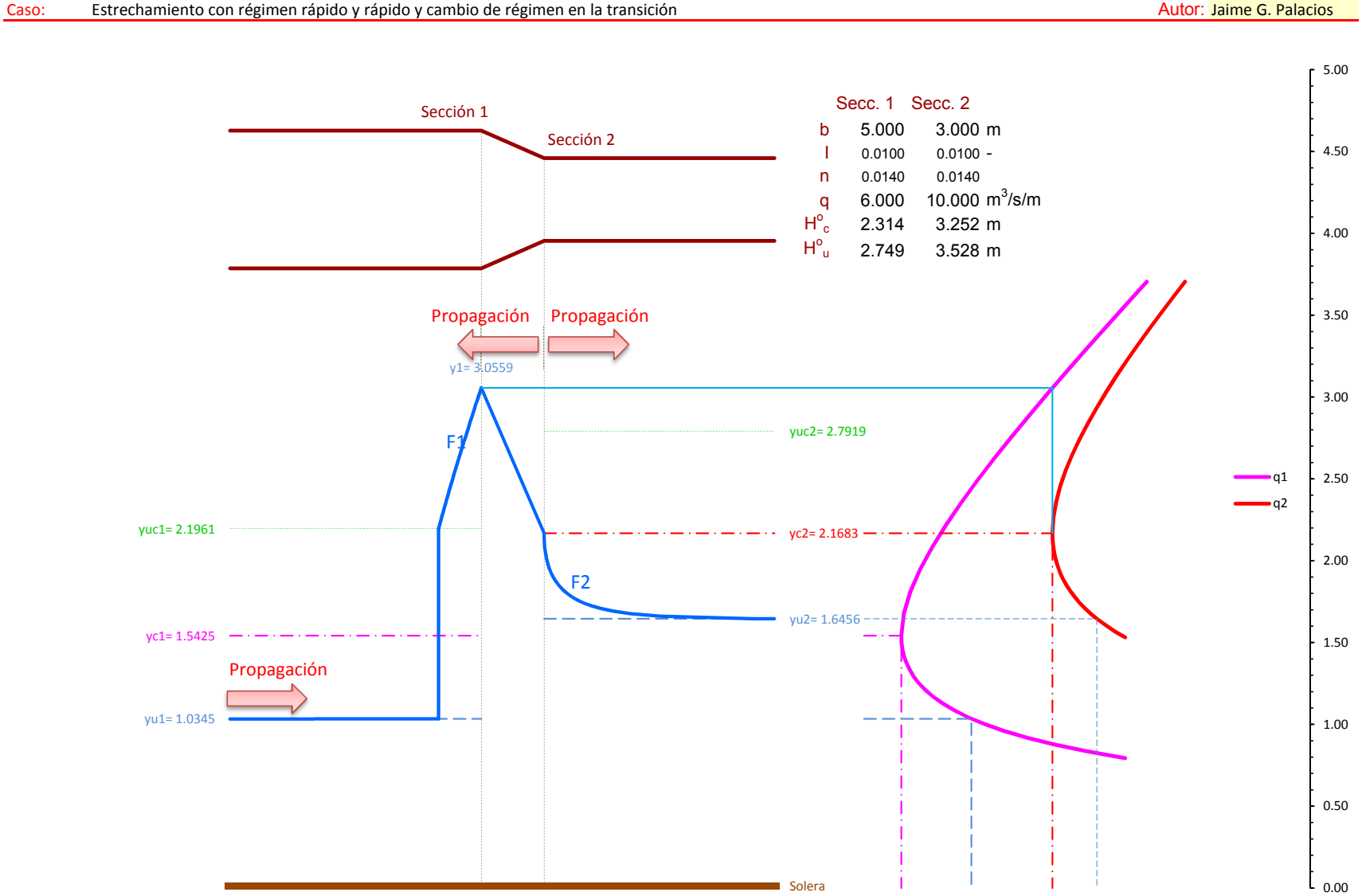


Figura 7.21: Estrechamiento en régimen rápido con cambio de régimen

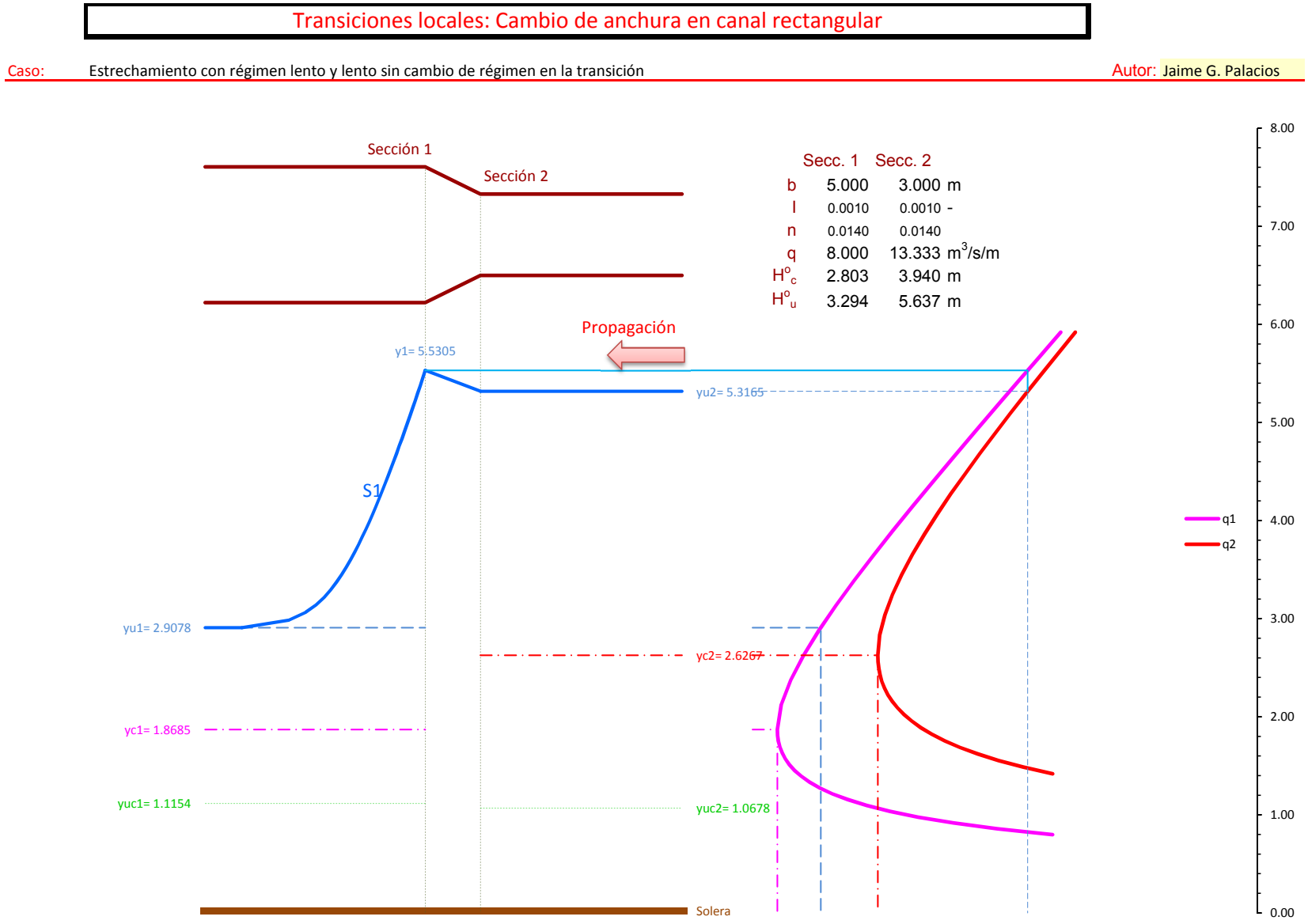


Figura 7.22: Estrechamiento en régimen lento sin cambio de régimen

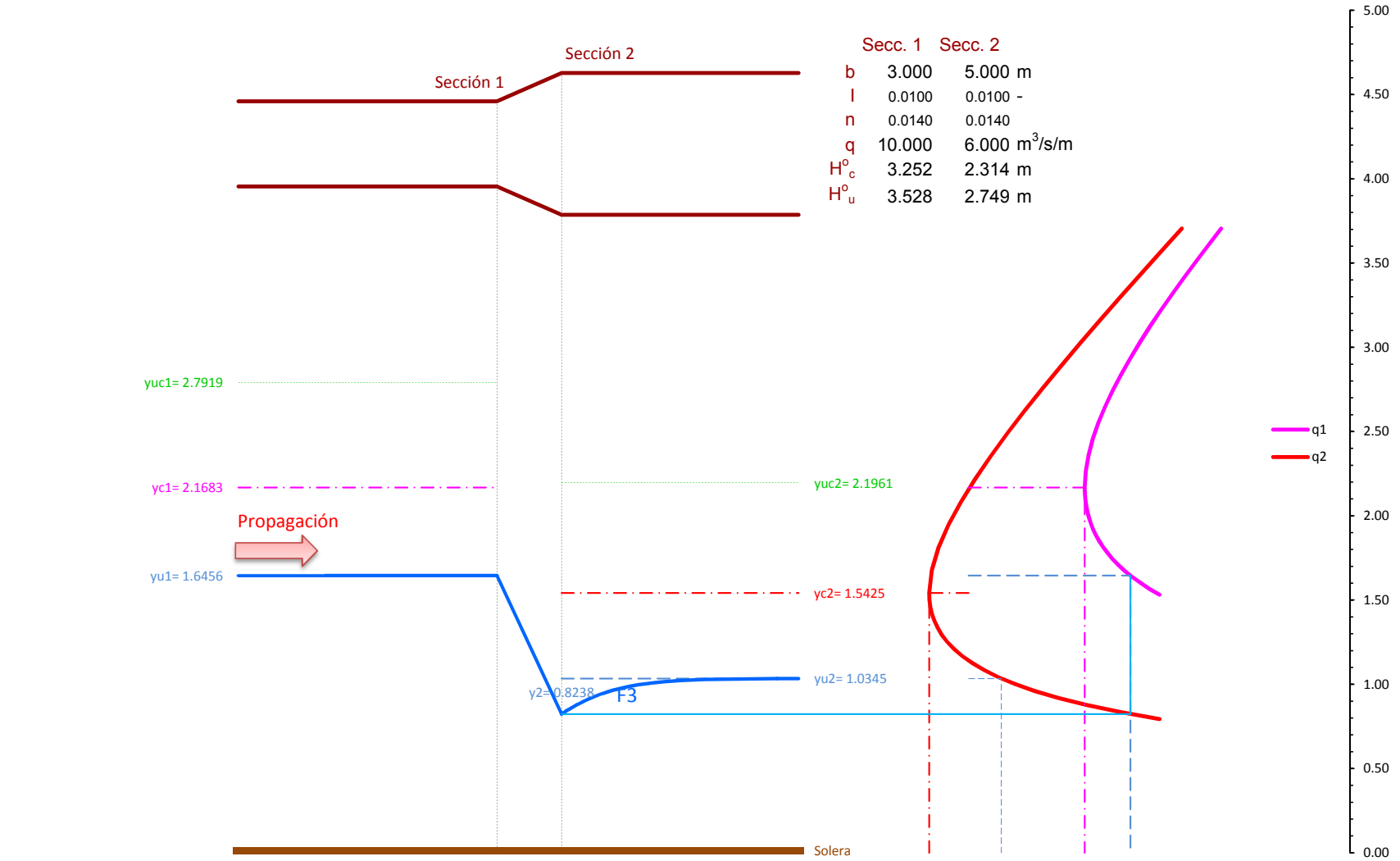


Figura 7.23: Ensanchamiento en régimen rápido sin cambio de régimen y curva $F3$

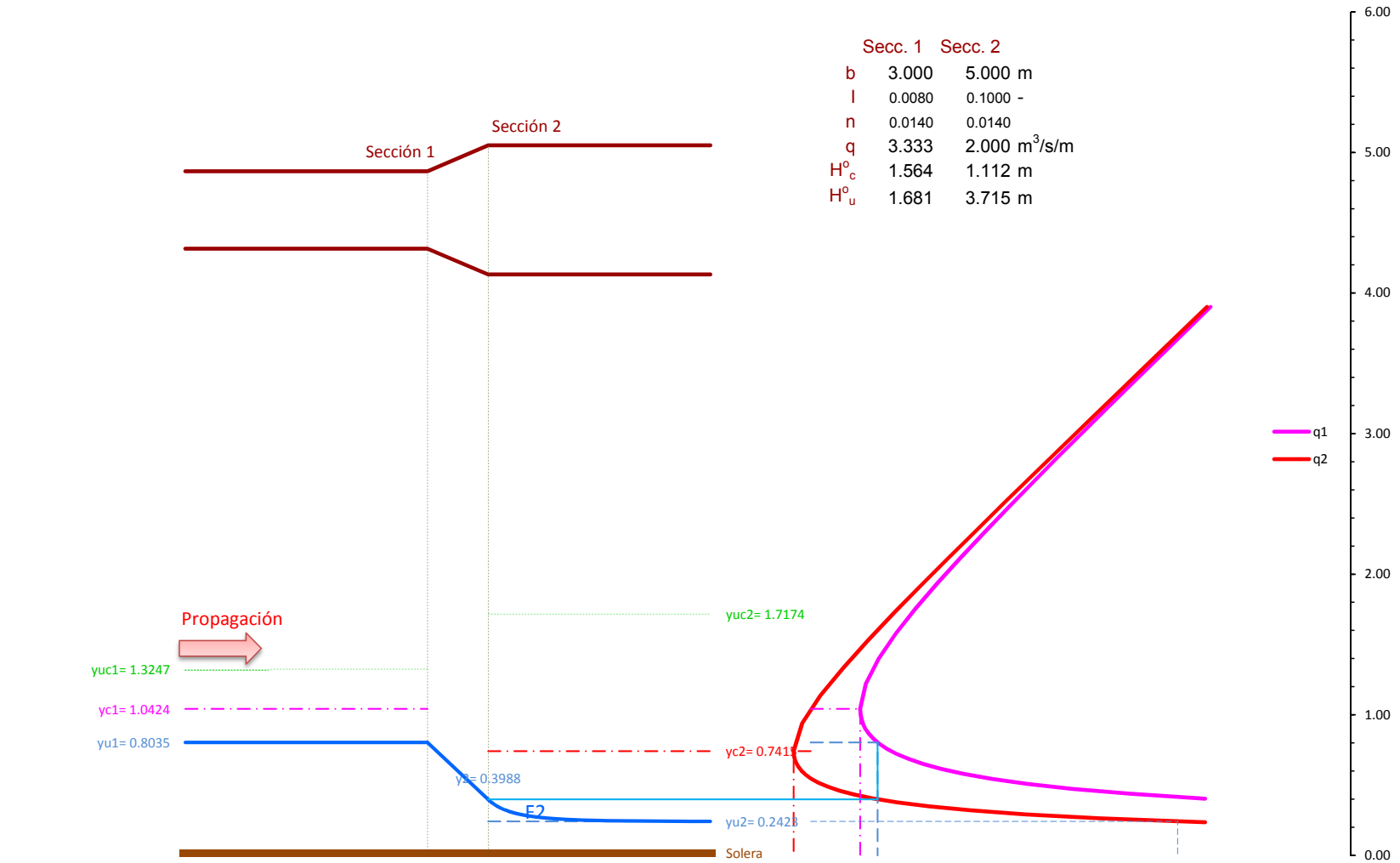


Figura 7.24: Ensanchamiento en régimen rápido sin cambio de régimen y curva $F2$

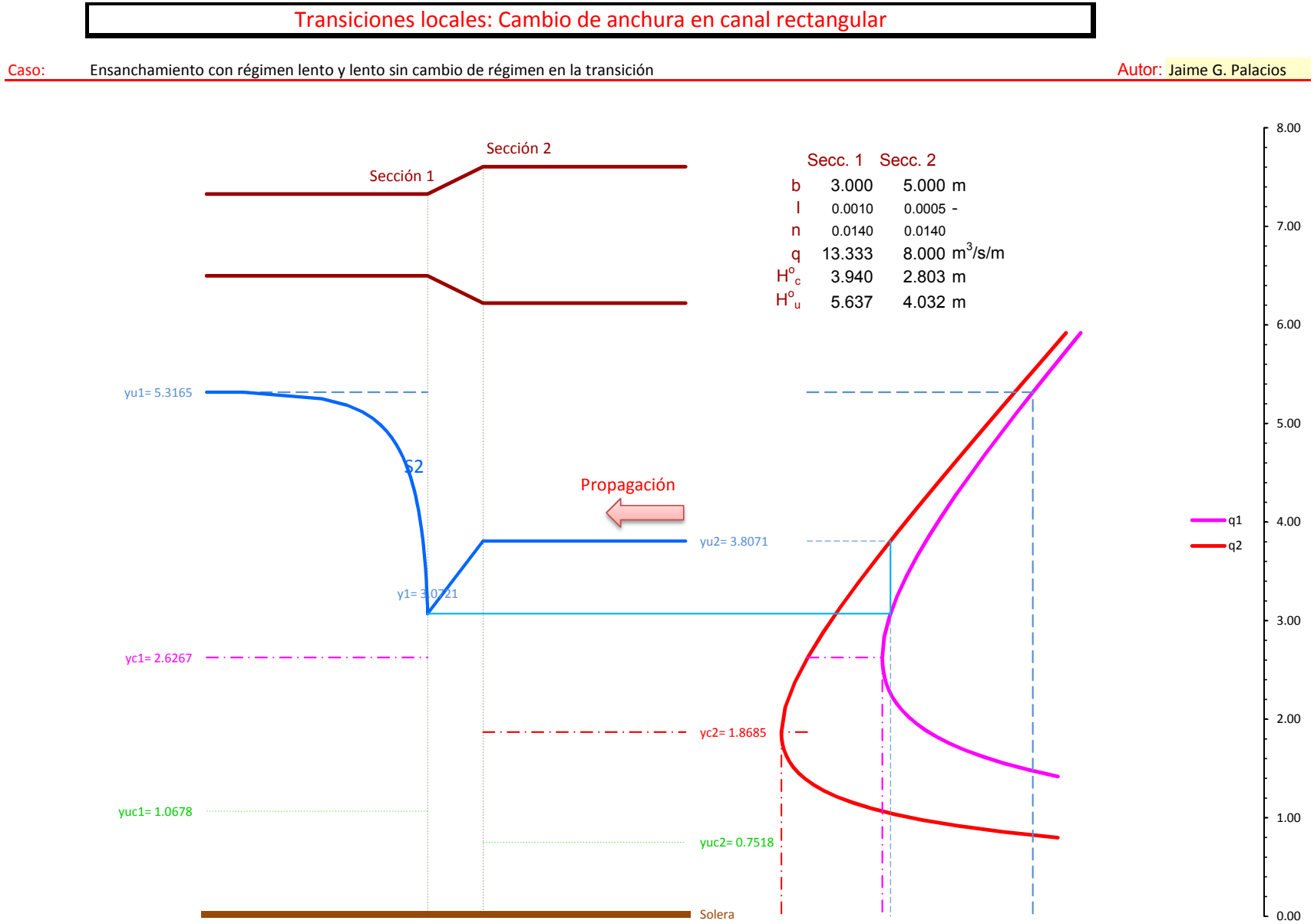


Figura 7.25: Ensanchamiento en régimen lento sin cambio de régimen

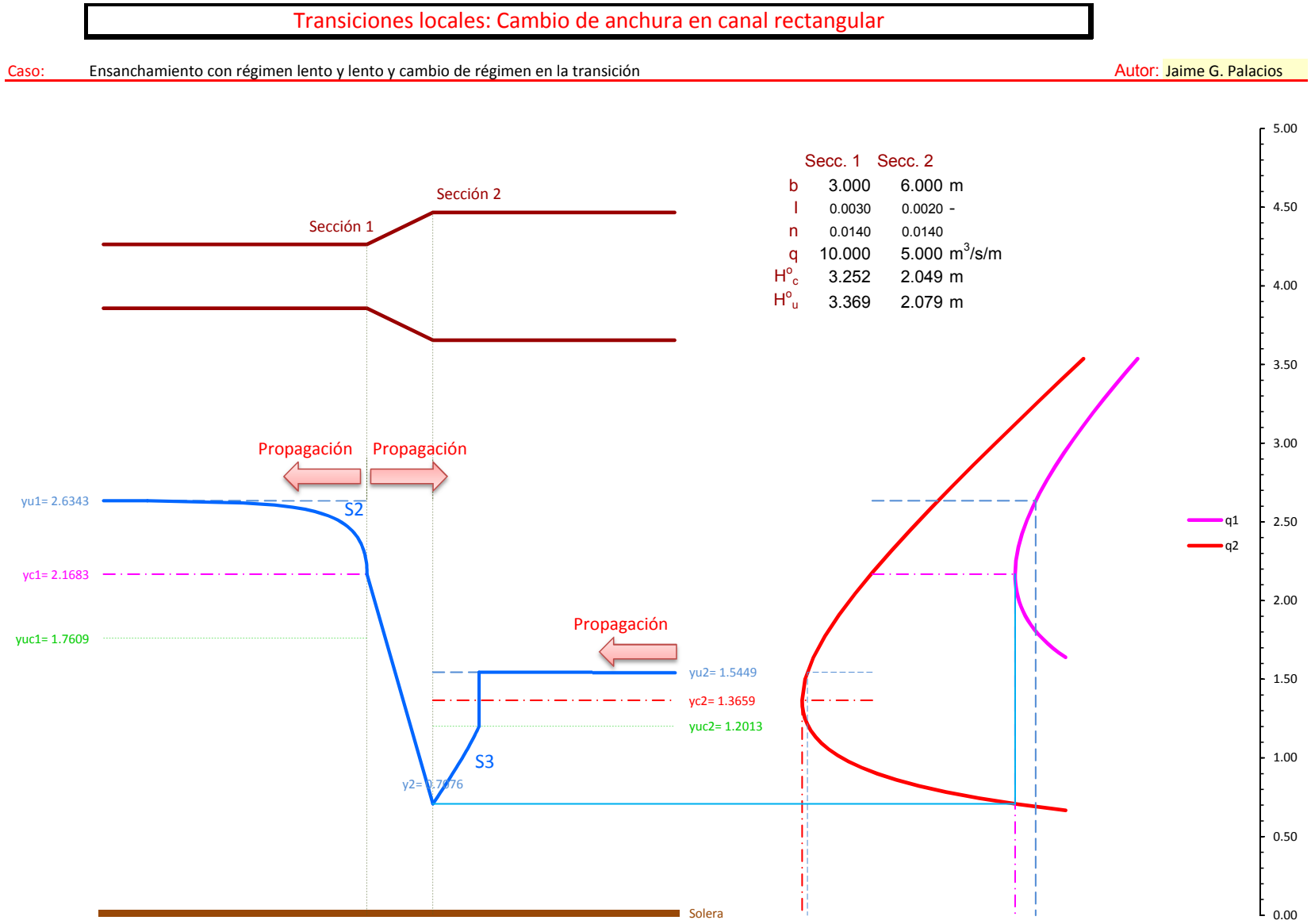


Figura 7.26: Ensanchamiento en régimen lento con cambio de régimen fuera de la transición

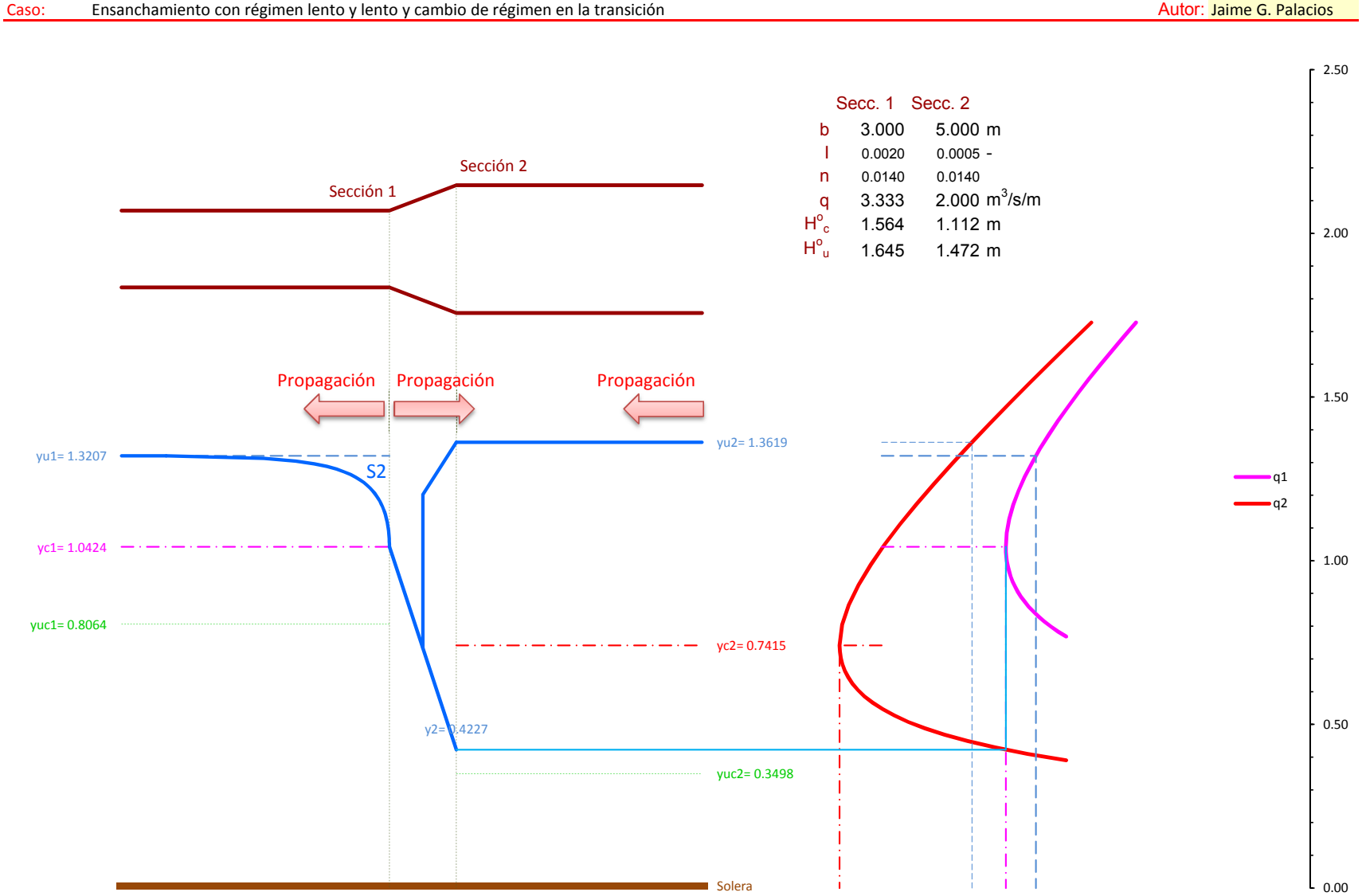


Figura 7.27: Ensanchamiento en régimen lento con cambio de régimen en la transición

7.12.2 Tomas de embalses

Las tomas de embalses se estudian mediante las curvas de Köch. Éstas se obtienen del corte de la superficie de energía específica para valores constantes de la energía específica. Las curvas obtenidas son en calado (y) frente al caudal circulante (Q).

De forma similar a las curvas de energía específica, se obtiene un punto de caudal máximo que se corresponde con el calado crítico. Calados superiores a éste se corresponden con régimen lento e inferiores con régimen rápido.

En una salida de embalse sin pérdida de carga, el valor de la energía específica en el embalse es la diferencia entre el nivel del embalse y la cota del labio del vertedero (el término de velocidad es nulo en el embalse).

El caudal desaguado se corresponderá con la capacidad del canal que conecta con la toma. La energía específica en la toma tiene los dos términos de energía, el correspondiente al calado, y el debido a la energía cinética. Asumiendo la conservación de energía específica entre el embalse y la toma, se tiene:

$$H^0 = z_{embalse} - z_{vertedero} = y + \frac{Q^2}{2gS^2} \tag{7.56}$$

con lo que conocida la sección transversal del canal, y las cotas del vertedero y el embalse, puede obtenerse el caudal.

El problema reside en establecer la relación entre el calado y el caudal en la zona del canal que conecta con la toma. Si el canal es indefinido puede suponerse que el calado es el correspondiente a régimen uniforme. Esta afirmación solo es válida en el caso que el canal pueda considerarse de pendiente suave. Si el régimen de salida es rápido, el cambio de régimen se produce en la toma donde el calado coincidirá con el crítico. En este caso el caudal del salida es el máximo que se obtiene en la curva de Köch.

Con régimen lento, además de la curva de Köch se puede dibujar, sobre la misma gráfica, la relación de caudal y calado correspondiente al régimen uniforme. Si se utiliza Manning, se tiene:

$$Q = \frac{\sqrt{I_0}}{n}\frac{S^{5/3}}{P^{2/3}} \tag{7.57}$$

El corte con la curva de Köch se corresponde con el caudal y calado compatible para ambas ecuaciones, y por tanto, solución del problema mientras este corte se realice en régimen lento.

Ejemplo

Caudal de salida de una toma

Un canal rectangular indefinido, de $b = 7\ m$ de ancho con pendiente $I_0 = 0.001$ conecta con un depósito con un vertedero a la cota $z_{vertedero} = 0\ m$ cuyo nivel de agua se sitúa a la cota $z_{embalse} = 5\ m$. Suponiendo un número de Manning $n = 0.011$. Calcular:

- Energía específica.

- Calado crítico correspondiente a esa curva de energía específica.
- Curva de los calados uniformes asociados a los distintos caudales de salida.
- Caudal de salida y calado uniforme asociado en el canal.

La energía específica constante para dibujar la curva de Köch se obtiene de:

$$H^0 = z_{embalse} - z_{vertedero} = 5 - 0 = 5\,m \tag{7.58}$$

Al ser canal rectangular, el calado crítico puede obtenerse como:

$$y_c = \frac{2}{3}H^0 = \frac{2}{3}5 = 3.333\,m \tag{7.59}$$

El caudal máximo será:

$$Q = \sqrt{g} \cdot b \cdot y_c^{3/2} = \sqrt{9.81} \cdot 7 \cdot 3.333^{3/2} = 133.43\,\frac{m^3}{s} \tag{7.60}$$

La curva que relaciona los calados de régimen uniforme con los caudales de régimen uniforme se obtiene de la relación:

$$Q = \frac{\sqrt{I_0}}{n}\frac{S^{5/3}}{P^{2/3}} == \frac{\sqrt{0.001}}{0.011}\frac{(7y_u)^{5/3}}{(7+2y_u)^{2/3}} \tag{7.61}$$

La representación de esta curva junto con la curva de Köch se puede ver en la figura 7.28. La solución del problema se corresponde con el corte de ambas curvas en el punto $y_u = 4.03\,m$ y $Q = 123.14\,m^3/s$. Los valores se han obtenido de la resolución numérica de la ecuación:

$$\frac{\sqrt{0.001}}{0.011}\frac{(7y_u)^{5/3}}{(7+2y_u)^{2/3}} = \sqrt{2g(5-y_u)} \cdot 7 \cdot y_u \tag{7.62}$$

Cuya solución puede obtenerse en el siguiente vínculo:

Solución en Wolfram alpha

7.13 Compuertas y vertederos

Las compuertas y vertederos son elementos para el control y gestión de los calados y caudales en canales. Con ellos puede medirse el caudal circulante o establecer los calados que se desea obtener en las distintas zonas del canal. En la zona de aguas arriba del vertedero el nivel de agua se mantiene bastante estable, lo que permite crear calado mínimos en determinadas zonas del canal. El vertedero también constituye un elemento de aireación de las aguas de un cauce con circulaciones lentas, lo que facilita la vida de las especies en el mismo.

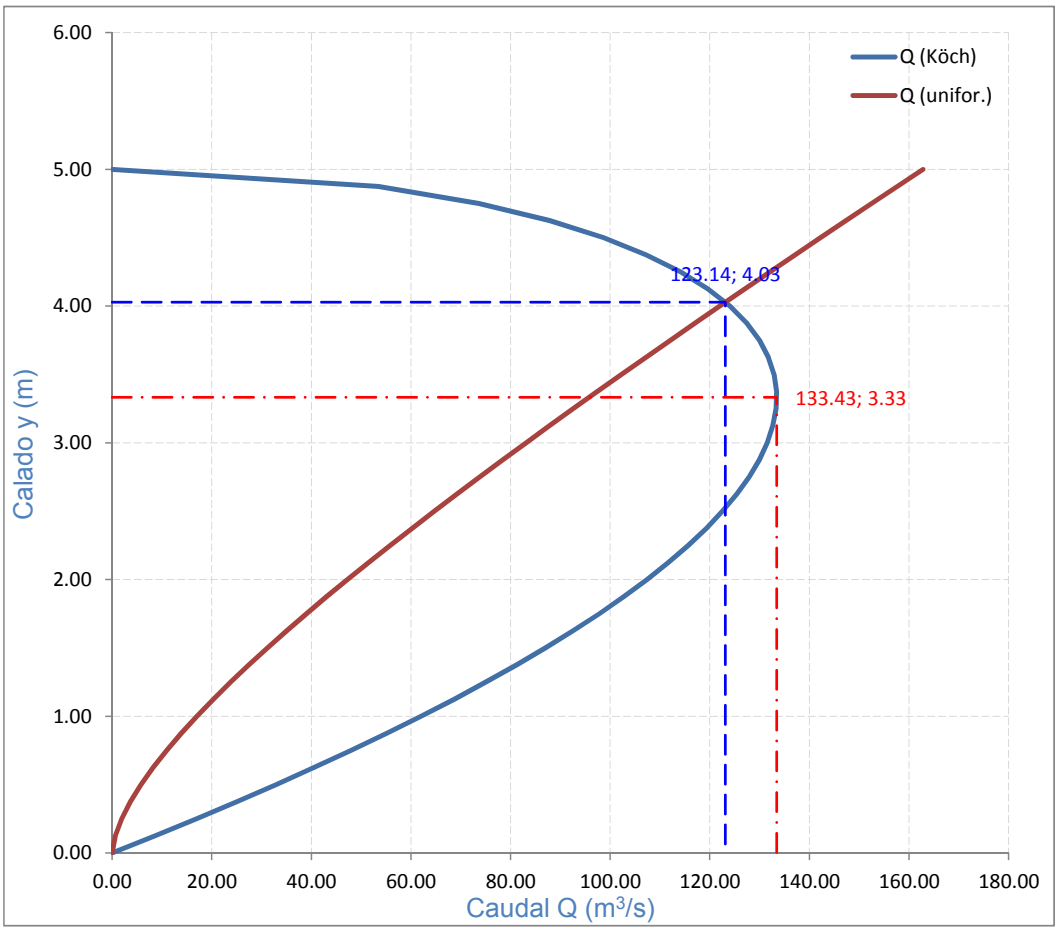


Figura 7.28: Curva de Köch y curva de regímenes uniformes

El caudal puede medirse conociendo el calado aguas arriba del vertedero medido desde la cota de vertido.

Existe una muy amplia variedad de estos elementos, pero este capítulo se centrará únicamente en la formulación general de algunos de ellos.

7.13.1 Clasificación de los vertederos

Los vertederos que se van a considerar pueden clasificarse en:

- Según la sección transversal:
  - Vertederos de pared delgada: Presentan una pared lateral delgada, generalmente achaflanada en su parte alta para provocar la separación de la lámina de agua. En su construcción debe cuidarse que la zona de aire que queda bajo el vertido tenga conexión directa con la atmósfera o se creará un vacío que atrae a la lámina de agua provocando una mayor descarga de la calculada. Pueden utilizarse para caudales pequeños ya que la presión actuando sobre de una de sus caras puede deformar la estructura, invalidando su funcionamiento. Son habituales en laboratorios
    - Vertederos rectangulares: Están formados por una línea recta horizontal perpendicular al flujo de circulación. En construcción es preciso realizarlos perfectamente nivelados. También es conveniente que la zona de aguas arriba se encuentre calmada si se quire utilizar como elemento de medida del caudal. Mantienen el mismo error absoluto de medida para los distintos niveles. Pueden ocupar todo o parte del ancho del canal, y tiene limitaciones en su colocación y geometría si quieren utilizarse como elemento de medida.
    - Vertederos triangulares: Mantienen el error relativo. Son más precisos que los rectangulares para caudales pequeños pero ofrecen una menor capacidad de desagüe a igual ancho de canal.
    - Vertedero trapezoidales: Son combinación de los anteriores, aunque no son muy habituales.
  - Vertederos de pared gruesa: Son habituales en las obras. Como ejemplo las presas de gravedad suelen presentar esta tipología. Un vertedero de este tipo puede ser una pieza vertical ancha, sin embargo la más habitual es que la geometría sea tal que la lámina de agua no se separa de la superficie del vertedero. En caso contrario se crearían depresiones que pueden deteriorar la superficie. Los perfiles tipo Creager o Bradley son habituales en esta tipología
- Según la dirección de vertido respecto de la dirección del flujo
  - Frontales: Cumplen la ecuación de continuidad. Se utilizan para medir caudales o regular en nivel del agua aguas arriba del mismo.

  - Laterales: Se utilizan normalmente para desviar los caudales excedentes que no se quiere que circulen por el canal principal.
  - Combinaciones de ambos: Como son los vertederos en pico de pato o los vertederos en laberinto, que buscan ampliar la longitud de vertido para tener una menor variación de calados aguas arriba del mismo cuando circulan distintos caudales. El vertedero en laberinto es una posible solución para mejorar la capacidad de vertido de un vertedero frontal previamente existente.
  - Otros: Existen otras geometrías, como los Morning Glory, para ser aplicados en casos especiales. Normalmente su diseño requiere de un estudio detallado que incluye ensayos de laboratorio.

- Según la capacidad de ser controlados
  - Vertido libre. Son vertederos con la cota del labio fijo
  - Con compuertas. Se utilizan compuertas para variar la cota del labio o controlar la altura máxima del vertido sobre el labio, como en las presas.

7.13.2 Ecuaciones de los distintos tipos de vertederos

- Vertedero de pared gruesa:

$$q = \frac{2}{3} C_d \sqrt{2g} h^{3/2} \tag{7.63}$$

siendo:

q	Caudal unitario por metro de ancho de vertedero	$(m^3/s/m)$
$C_d = \frac{1}{\sqrt{3}}$	Coeficiente de desagüe	$(-)$
h	Altura de vertido sobre la cota del vertedero	(m)

- Vertedero rectangular de pared delgada:

$$q = \frac{2}{3} C_d \sqrt{2g} h^{3/2} \tag{7.64}$$

siendo:

q	Caudal unitario por metro de ancho de vertedero	$(m^3/s/m)$
C_d	Coeficiente de desagüe dependiente de las condiciones del vertedero	$(-)$
h	Altura de vertido sobre la cota del vertedero	(m)

El coeficiente de desagüe puede obtenerse mediante:

$$C_d = 0.611 + 0.075 \frac{h}{a} \tag{7.65}$$

siendo a la profundidad antes del vertedero. Cuando $a \gg h$ este valor tiende a $C_d = 0.611$

- Vertedero triangular de pared delgada:

$$Q = \frac{8}{15} C_d \tan \frac{\beta}{2} \sqrt{2g} h^{5/2} \tag{7.66}$$

siendo:

β	Angulo del vértice del triángulo	
C_d	Coeficiente de desagüe facilitado por el fabricante	$(-)$

El valor de C_d esta en torno a 0.58

7.13.3 Desagüe bajo compuerta

Cuando en un canal por el que circula libremente un caudal con calado y, colocamos una compuerta que interrumpe parcialmente el flujo permitiendo el paso por una apertura $a < y$ conocida en la parte inferior ocurre lo siguiente:

- Inicialmente, el caudal aguas abajo de la compuerta es menor y se produce una acumulación de agua retenida por la compuerta
- El nivel aguas arriba de la compuerta crece, haciendo que la energía en esa sección aumente.
- El aumento de energía hace que cada vez el caudal que sale por la apertura a aumente al incrementarse la velocidad de salida
- Habrá un momento en que el caudal se iguale con el que estaba circulando por el canal alcanzando de nuevo el equilibrio de régimen permanente.

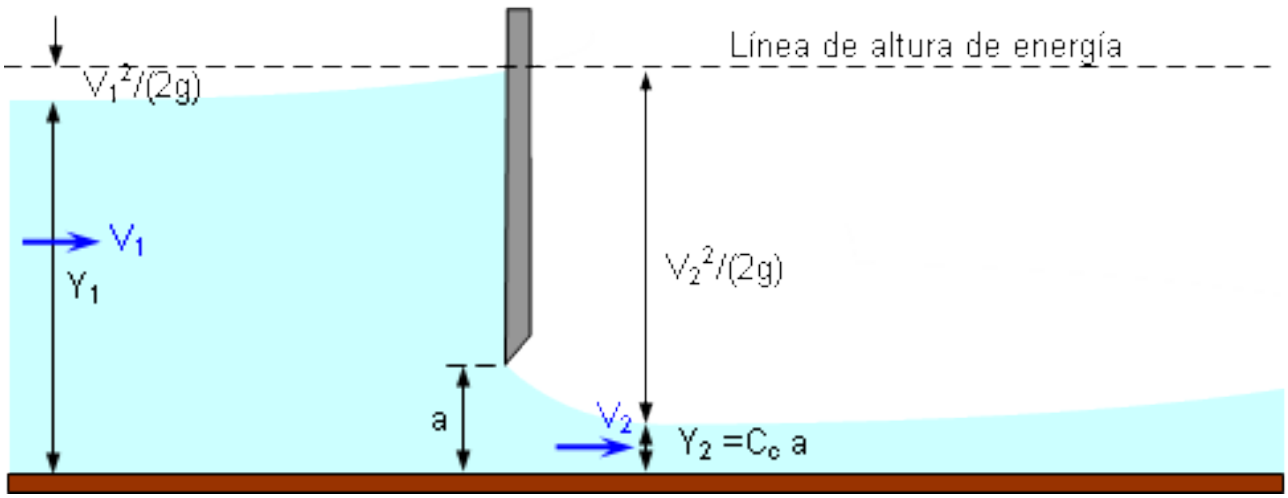


Figura 7.29: Esquema del desagüe bajo compuerta cuando no está anegada

El desagüe bajo compuerta se puede estudiar utilizando Bernoulli entre una sección aguas arriba de la compuerta y la sección de menor calado que queda tras la compuerta en el punto de máxima contracción. La sección aguas arriba no puede estar muy encima de la compuerta o las líneas de flujo no serán paralelas entre sí (hipótesis necesaria para aplicar Bernoulli), y el calado se verá afectado por la velocidad nula junto a la compuerta. Sin embargo deberá ser una sección cercana para no

verse afectada significativamente por la curva de remanso que se forma aguas arriba de la compuerta. La sección aguas abajo se corresponderá con la máxima contracción donde las líneas de flujo son claramente paralelas.

Las ecuaciones que gobiernan el desagüe libre bajo compuerta, necesarias para formar el régimen rápido, se obtienen aplicando la conservación del trinomio de Bernoulli (ecuación 7.67) y la ecuación de continuidad.

$$y_1 + \frac{q^2}{2gy_1^2} = C_c a + \frac{q^2}{2g\left(C_c a\right)^2} \rightarrow q^2 = 2g\frac{\left(C_c a y_1\right)^2}{C_c a + y_1} \tag{7.67}$$

siendo:

q	Caudal desaguado por ancho unitario de canal	(m^2/s)
y_1	Altura de la lámina de aguas arriba de la compuerta, pero no en el punto de parada donde se produce un ligero aumento del nivel	$(-)$
a	Apertura de la compuerta	(m)
C_c	Coeficiente de contracción (calado de salida de la compuerta / apertura). Este coeficiente es función de la geometría de la misma y en particular del ángulo de salida de la misma	$(-)$

Esta relación se suele expresar en la literatura en función del coeficiente de desagüe C_d como:

$$q = C_d a\sqrt{2gy_1} \tag{7.68}$$

Por lo que la relación entre el coeficiente de desagüe y el de contracción resulta:

$$C_d = \frac{C_c}{\sqrt{1 + C_c\frac{a}{y_1}}} \tag{7.69}$$

También puede comprobarse que se cumple la relación de calados aguas arriba y aguas abajo de la compuerta dada por:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{8}{F_1^2}} - 1\right) \tag{7.70}$$

Puede ocurrir que el calado en la contracción (y_2) sea menor que el conjugado del régimen uniforme que se propaga en régimen lento hacia la compuerta desde aguas abajo. En ese caso se obtiene una compuerta anegada, donde el resalto se produce en la propia salida.

Modelos reducidos VIII

8.1 Introducción

Existen muchos fenómenos en la naturaleza que, por su complejidad, no somos aún capaces de reproducirlos mediante una adecuada modelización matemática. Un caso notable, sobre el que se ha invertido e invierte mucho tiempo y dinero en investigación y desarrollo es el comportamiento de la atmósfera. Se requieren de unos 15 años de investigación y desarrollo para ser capaces de mejorar la previsión meteorológica en un día con precisión.

La evaluación del comportamiento de un diseño ante de que este sea una realidad es algo muchas veces difícilmente evaluable que requiere de los conocimientos de expertos y de una intuición, basada en la experiencia, que no siempre cuenta con una forma de expresión matemática aplicable por otras personas. La valoración de un determinado fenómeno por un grupo de expertos mejorará el diseño minimizando los problemas identificados a priori.

En muchos casos, y a pesar de la participación de expertos y de la utilización de modelos numéricos, el grado de incertidumbre que puede obtenerse en un diseño puede ser lo suficientemente elevado que puede requerirse de la construcción de un modelo a escala que reproduzca, de la forma mas fiel posible, el comportamiento real del prototipo. Denominamos **modelo** a la reproducción a escala del **prototipo**, que es el modelo a escala real.

Este tipo de modelos reducidos se justifica cuanto mayor es la incertidumbre, y sobre todo, el coste del prototipo. Los cambios en un diseño realizados en un prototipo que no funciona adecuadamente tendrán un coste elevado y pueden llegar a ser parches inadecuadamente construidos al no haberse planteado desde el inicio. En cambio, las modificaciones realizadas en un modelo a escala tienen un coste mucho más reducido y permiten la evaluación de diferentes alternativas buscando la optimización coste-funcionamiento del prototipo.

Si bien, los modelos reducidos han sido, y siguen siendo ampliamente utilizados, sobre todo en la mecánica de fluidos, requieren un profundo conocimiento del problema a estudio. En caso contrario, pueden obtenerse resultados alejados de la realidad. El modelo a escala deberá ser capaz de reproducir adecuadamente los fenómenos que se quieren modelizar y las variables que influyen sobre los mismos. Dada la imposibilidad de reproducir a escala todas las magnitudes que intervienen en un determinado

problema físico, por ejemplo la gravedad, deberán adoptarse una serie de simplificaciones que afectan al comportamiento del modelo. Es importante conocer, a priori, la influencia que estas simplificaciones tienen entre el comportamiento real del prototipo y el modelo, y cuando sea posible, evaluarlas.

Para poder afrontar el estudio de los modelos reducidos se va a introducir el concepto de análisis dimensional. Éste permite reducir el número de variables intervinientes en un problema y expresar el resto en función de las consideradas como fundamentales.

Utilizando el análisis dimensional se expresará la **Ecuación general de la hidráulica** y se obtendrán los monomios adimensionales asociados a los principales fenómenos intervinientes en los distintos problemas físicos relacionados con la mecánica de fluidos.

Del estudio del diseño de un prototipo dado, se determinará el comportamiento predominante en el fluido. Sobre este comportamiento se elegirá la semejanza de escalas más adecuada para la representación del modelo. Esta semejanza se establece a través del monomio adimensional predominante anteriormente obtenido. Finalmente, se evaluará la influencia asociada a la adopción de esta simplificación antes de proceder a la construcción del modelo. Este proceso se detalla en el apartado 8.4

8.2 Análisis dimensional

8.2.1 Introducción

El análisis dimensional fue introducido, de forma teórica, por Lord Rayleigh en 1877 en el libro *'The Theory of Sound'* sin embargo este ha sido atribuido a Buckingham en 1915 por la publicación *'Model experiments and the form of empirical equations'*, siendo actualmente conocido como el **Teorema de Buckingham Pi**, proviniendo el Pi de los números adimensionales contenidos en el desarrollo matemático del mismo.

El análisis dimensional permite expresar una serie de magnitudes físicas en función de otras que consideramos fundamentales.

8.2.2 Definiciones

Consideramos una **magnitud física** a la propiedad medible de un elemento o conjunto físico. Hay que tener en cuenta que hay propiedades, como la dureza, que son comparables, pero no medibles. Ésta no constituiría una magnitud física.

Cuando algo es medible lo hacemos en un sistema de referencia, pero este no tiene porque ser único. Por ejemplo, sean $(L_1, L_2, \ldots, L_p)$ una medidas de longitud observables. Sean L_u y L'_u dos medidas de longitud distintas que tomaremos como referencia.

$$u_1 = \frac{L_1}{L_u} \tag{8.1}$$

expresa el número de veces que L_1 contiene la unidad de referencia L_u, mientras que:

$$u'_1 = \frac{L_1}{L'_u} \tag{8.2}$$

expresa el número de veces que L_1 contiene la unidad de referencia L'_u.

Como L_1 no varia independientemente de la unidad adoptada como referencia:

$$L_1 = u_1 L_u = u'_1 L'_u \qquad \rightarrow \qquad u'_1 = u_1 \frac{L_u}{L'_u} \tag{8.3}$$

Por tanto:

$$\frac{L_u}{L'_u} \tag{8.4}$$

representa la transformación que nos permite pasar de un sistema de coordenadas al otro.

Dentro de las magnitudes físicas existen una serie de magnitudes únicamente dependientes de si mismas a las que llamaremos **magnitudes fundamentales** pudiendo el resto de las magnitudes expresarse en función de éstas. A éstas últimas las denominaremos **magnitudes derivadas**.

Las unidades fundamentales son las que, en cada problema, quieran tomarse como tales, y pueden estar formadas por cualquier conjunto de magnitudes físicas independientes entre si. Es decir, puede ser cualquier conjunto de magnitudes físicas siempre que cumplan el criterio de independencia lineal entre ellas cuando se encuentran expresadas sobre el mismo sistema de referencia. Las demás magnitudes físicas se expresarán en función de las elegidas.

En un movimiento uniforme la velocidad es una expresión de la distancia recorrida en función del tiempo que se tarda en recorrer dicha distancia. Por tanto, se tendrán 2 magnitudes fundamentales, distancia (L) y tiempo (t), expresándose la magnitud derivada (v) como:

$$v = \frac{L}{t} \tag{8.5}$$

Sin embargo, cuando se trabaja con la distancia entre cuerpos en el espacio estamos acostumbrados a referirnos a ella como *'años-luz'*, lo que en realidad constituye un ejemplo de expresión de la distancia como magnitud derivada de las fundamentales dadas por la velocidad de la luz (c) y el tiempo (t), en la forma:

$$L = c \cdot t \tag{8.6}$$

8.2.3 Teorema de Buckingham-Pi

Sean q_1, q_2, q_3, $\ldots$, q_n las n magnitudes físicas relevantes del problema a estudio y que se relacionan entre si mediante un conjunto conocido de ecuaciones homogéneas. Esta relación puede expresarse de la forma:

$$F(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n) = 0 \qquad \text{de forma equivalente} \qquad q_1 = f(q_2, q_3, \ldots, q_n) \tag{8.7}$$

Si el sistema formado por las n variables tiene dimensión k, existe, al menos, un conjunto k de variables independientes, y el resto de variables, dado por $j = n - k$ puede expresarse en función de una serie de j monomios adimensionales[1] $(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{n-k})$. En este caso, la relación funcional dada en la ecuación (8.7) puede expresarse de forma más compacta como:

$$\Phi(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{n-k}) = 0 \qquad \text{de forma equivalente} \qquad \Pi_1 = \phi(\Pi_2, \ldots, \Pi_{n-k}) \tag{8.8}$$

Téngase en cuenta que el sistema formado por las k variables independientes no tiene por que ser único, aunque si debe cumplir la condición de independencia lineal entre ellas.

8.2.4 Aplicación práctica del teorema

Dado un problema a estudio, deben seguirse los siguientes pasos:

- Identificar todas las magnitudes físicas existentes en el modelo
- Elegir las magnitudes física más relevantes en función de aquellos aspectos que se quieren analizar en el modelo. Este paso requiere un profundo conocimiento del comportamiento físico. Habrá que pensar en las posibles restricciones del problema y la posibilidad, o no, de que pueda variar las diferentes magnitudes físicas de forma independiente.

  Si estudiamos el peso de un objeto $P = \rho g V$, sólo podemos actuar sobre dos parámetros, la masa ρ y el volumen V, a no ser que seamos capaces de cambiar la gravedad. Incluso puede ser posible que no podamos variar la masa, como puede ser el caso de un modelo hidráulico donde la existencia de un volumen de agua importante en circulación no pueda sustituirse por otro fluido.
- Expresar las n magnitudes físicas del problema en función del conjunto de variables fundamentales $\{[M][L][T][\theta]\}$ ó $\{[F][L][T][\theta]\}$, donde $[M]$ es masa, $[L]$ longitud $[T]$, tiempo, $[\theta]$ temperatura y $[F]$ es fuerza.
- Seleccionar dentro de las magnitudes físicas más relevantes, el conjunto linealmente independiente de dimensión k sobre el que se expresarán las demás $(j = n - k)$ variables como monomios adimensionales.
- Calcular los Π_j monomios adimensionales. Para ello basta con trabajar sobre una matriz con todas las magnitudes físicas del problema, e ir realizando transformaciones hasta conseguir que las k magnitudes elegidas como fundamentales formen una matriz unitaria. Los coeficientes asociados al resto de las j variables son las potencias que las relacionan a esas k magnitudes.
- Comprobar la adimensionalidad de los monomios para evitar posibles errores.

[1] Un monomio adimensional es un producto de magnitudes, fundamentales o derivadas, cuyo resultado no tiene dimensión

- Expresar los monomios en función de la magnitud que se ha considerado como relevante. Si esta es Π_1:

$$\Pi_1 = \phi\left(\Pi_2, \ldots, \Pi_{n-k}\right) \tag{8.9}$$

- Realizar una interpretación física del resultado

- Asegurarse de la independencia de cada uno de los monomios. Esto implica que la variación de uno de ellos no afecta al resto que permanecerán constantes.

- Finalmente, comparar los resultados de los distintos ensayos.

8.2.5 Expresión de las magnitudes físicas en los sistemas $\{[M][L][T][\theta]\}$ ó $\{[F][L][T][\theta]\}$

Magnitud física	Símbolo	Fórmula	Ud (SI)	$\{[M][L][T][\theta]\}$				$\{[F][L][T][\theta]\}$			
				M	L	T	θ	F	L	T	θ
Longitud	L	L	m		1				1		
Area	A	L^2	m^2		2				2		
Volumen	V	L^3	m^3		3				3		
Tiempo	t	t	s			1				1	
Masa	m	m	kg	1				1	-1	2	
Velocidad	v	L/t	m/s		1	-1			1	-1	
Aceleración	a	L/t^2	m/s^2		1	-2			1	-2	
Fuerza	F	$m \cdot a$	N	1	1	-2		1			
Presión	p	F/A	Pa	1	-1	-2		1	-2		
Tensión superficial	σ	F/L	N/m	1		-2		1	-1		
Densidad	ρ	m/L^3	kg/m^3	1	-3			1	4	2	
Peso específico	γ	F/L^3	N/m^3	1	-2	-2		1	-3		
Viscosidad dinámica	μ	$p \cdot t$	$Pa \cdot s$	1	-1	-1		1	-2	1	
Viscosidad cinemática	ν	μ/ρ	m^2/s		2	-1			2	-1	
Mod. elasticidad volum.	E_v	F/A	Pa	1	-1	-2		1	-2		
Trabajo	τ	$F \cdot t$	J	1	2	-2		1	1		
Energía	E	$F \cdot t$	J	1	2	-2		1	1		
Potencia	P	E/t	W	1	2	-3		1	1	-1	
Momento	M	$F \cdot L$	$m \cdot t$	1	2	-2		1	1		
Vel. angular	ω	$rps/2$	rad			-1				-1	
Temperatura	T	T	º				1				1
Calor específico	C_p			1	1	-3	-1	1		-1	-1
Coef. expansión térmica	α	$1/T$	$º^{-1}$				-1				-1

Tabla 8.1: Expresión de las magnitudes físicas en 2 sistemas de unidades

Ejemplo

Análisis dimensional de un péndulo

Sea un péndulo de masa m situado al final de una cuerda sin peso de extensión L. Estudiar su movimiento mediante el análisis dimensional.

1. Identificar las magnitudes físicas que intervienen en el sistema:

L	longitud de la cuerda	(m)
m	Masa del péndulo	(kg)
g	Gravedad de la tierra	(m/s^2)
x	Desplazamiento horizontal del péndulo respecto de su posición de equilibrio	(m)
t	Tiempo de la oscilación (periodo)	(s)

2. A continuación se eligen las magnitudes fundamentales en función del conocimiento de la física del problema. En este caso se toman L, m, g.

3. Se expresan todas las magnitudes en un sistema $\{[M][L][T]\}$.

Magnitud física	Símbolo	Ud	M	L	T
Longitud	L	m		1	
Gravedad	g	m/s^2		1	-2
Masa	m	kg	1		
Desplazamiento	x	m		1	
Tiempo	t	s			1

Tabla 8.2: Expresión en $\{[M][L][T]\}$ de las magnitudes físicas intervinientes en el problema

4. Comprobar que las k magnitudes fundamentales son independientes:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \tag{8.10}$$

5. Calcular los coeficientes de las $n-k$ magnitudes fundamentales derivadas en función de las k fundamentales. Para ello, podemos resolver un sistema de ecuaciones entre las magnitudes fundamentales y cada una de las derivadas, o bien aplicar una reducción del tipo Gauss hasta conseguir una matriz unidad entre las magnitudes fundamentales. En este caso los coeficientes que se obtienen en las magnitudes derivadas expresan la potencia de la magnitud fundamental asociada necesaria para mantener la dimensionalidad del sistema.

   A continuación se muestra como se obtiene el monomio adimensional del tiempo en el sistema de referencia dado por $[M][L][g]$ mediante la resolución de un sistema.

(a) Tenemos el tiempo expresado en $[M][L][T]$ como $t = [M]^0[L]^0[T]^1$ siendo las potencias los correspondientes coeficientes en la fila del tiempo en la tabla 8.2.

(b) Queremos ponerlo en función de un sistema en la forma $t = [L]^a[G]^b[M]^c$. Para ello es necesario resolver el sistema de ecuaciones dado por:

$$\left.\begin{array}{c} 0\cdot a+0\cdot b+1\cdot c=0 \\ 1\cdot a+1\cdot b+0\cdot c=0 \\ 0\cdot a+-2\cdot b+0\cdot c=1 \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad a=\frac{1}{2}\,, \qquad b=\frac{-1}{2}\,, \qquad c=0 \tag{8.11}$$

siendo los coeficientes del sistema los valores por columnas dados en la tabla 8.2 para las magnitudes elegidas como fundamentales. Los coeficientes independientes son los correspondientes a la fila donde tenemos el tiempo.

(c) Por tanto, t queda expresado como $t = [L]^{\frac{1}{2}}[G]^{\frac{-1}{2}}[M]^0 = \sqrt{\frac{L}{g}}$ en el nuevo sistema de referencia.

(d) Finalmente, el monomio adimensional correspondiente se obtiene como:

$$\Pi = \frac{t}{\sqrt{\frac{L}{g}}} = t\sqrt{\frac{g}{L}} \tag{8.12}$$

cuya adimensionalidad es fácilmente comprobable

Algebraicamente esto es similar a realizar una reducción de Gauss sobre la matriz de magnitudes elegidas como fundamentales hasta reducirla a la matriz unidad manteniendo las transformaciones en el resto de magnitudes físicas del problema. Los coeficientes obtenidos en las magnitudes derivadas serán las potencias correspondientes a las magnitudes fundamentales unitarias obtenidas en la correspondiente columna. A continuación se muestra esta forma de resolver el sistema:

$$\begin{bmatrix} L & 0 & 1 & 0 \\ g & 0 & 1 & -2 \\ m & 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} L & 0 & 1 & 0 \\ g & 0 & 0 & 1 \\ m & 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \tag{8.13}$$

Para pasar de la matriz de la izquierda a la de la derecha se han realizado las operaciones siguientes:

- La primera columna se queda como esta.
- La segunda columna es la suma de ella misma con la tercera multiplicada por $1/2$.
- La tercera columna es ella misma multiplicada por $-1/2$.

6. Expresar las magnitudes derivadas en función de las fundamentales.

Téngase en cuenta que como la matriz unitaria que se ha conseguido tenía el 1 correspondiente a la magnitud fundamental m en la primera columna, los coeficientes de esta columna serán los correspondientes a la masa, la segunda columna son los coeficientes de la longitud y la tercera los asociados a la gravedad.

Magnitud física	Símbolo	m	L	g	Expresión	Nº adimensional
Longitud	L		1		$m^0L^1g^0$	
Gravedad	g			1	$m^0L^0g^1$	
Masa	m	1			$m^1L^0g^0$	
Desplazamiento	x		1		$m^0L^1g^0$	$\Pi_1 = xL^{-1}$
Tiempo	t		0.5	-0.5	$m^0L^{1/2}g^{-1/2}$	$\Pi_2 = tL^{-1/2}g^{1/2}$

Tabla 8.3: Expresión en $\{[m][L][g]\}$ de las magnitudes físicas intervinientes en el péndulo

7. Obtención de los número adimensionales. Lo que se expresa en la última columna de la tabla 8.3

   La expresión como número adimensional Π_1 del valor del desplazamiento x implica que:

   $$\Pi_1 = \frac{x}{m^0L^1g^0} \tag{8.14}$$

   es adimensional. El valor de los coeficientes (m, l, g) de la última columna se corresponden con el obtenido en la columna anterior cambiados de signo. También se podría haber tomado Π_1 como $1/\Pi_1$ o incluso multiplicado por un valor numérico. En todos los casos seguiría siendo una magnitud adimensional.

8. Comprobación de que estos números son realmente adimensionales.

   - $\Pi_1 = \frac{x}{L} = \frac{m}{m}$ es adimensional.
   - $\Pi_2 = \frac{t}{\sqrt{\frac{L}{g}}} = \frac{s}{\sqrt{\frac{m}{m/s^2}}}$, que también es adimensional.

9. Expresión de todos los monomios adimensionales en función de uno de ellos.

   En este caso, si expresamos Π_2 en función de Π_1, se obtiene un gráfico como el de la figura 8.1 que representa la oscilación del péndulo.

   Matemáticamente lo que estamos planteando es una función:

   $$f(\Pi_1, \Pi_2) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \sqrt{\frac{g}{L}}t = \Phi\left(\frac{x}{L}\right) = \Phi(\text{ sen } \theta) \tag{8.15}$$

   La dificultad radica en darse cuenta que el término x/L representa sen θ, pero eso es lo que implica el tener un conocimiento físico del problema planteado. Si despejamos el tiempo de la ecuación 8.15, se obtiene:

   $$t = \sqrt{\frac{L}{g}}\Phi(\text{ sen } \theta) \tag{8.16}$$

   Si comparamos este valor con la oscilación de un péndulo dada por:

   $$t = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\text{ sen } \theta \tag{8.17}$$

   Vemos que ambas ecuaciones son coincidentes. La proporcionalidad adimensional 2π existente entre $\Phi(\text{ sen } \theta)$ y 2π sen θ es un resultado lógico cuando se trabaja con monomios adimensionales.

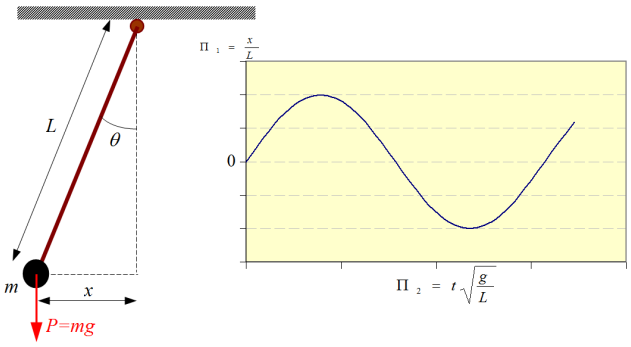


Figura 8.1: Análisis dimensional de un sistema pendular

10. Interpretación física, siempre que sea posible, de estos números.

    Observando Π_1, vemos que el desplazamiento horizontal del péndulo es directamente proporcional a la longitud de la cuerda y no depende de nada más.

    En el caso de Π_2 ya se ha realizado en el punto anterior, a través de su relación con Π_1

Ejemplo

Análisis dimensional en una bomba

La potencia P producida por una turbina es función de la densidad del fluido ρ, la velocidad de rotación n, el diámetro del rodete D y la altura de salto neto H. Obtenga mediante análisis dimensional la expresión de esta dependencia.

En la tabla 8.4 se refleja cada una de las variables del problema en el sistema $\{[M][L][T]\}$. Se toman como magnitudes relevantes las dadas por D, ρ y n, y como derivadas P, H y g. Para obtener la potencia se tiene en cuenta sus unidades, en la forma:

$$P = \gamma \cdot Q \cdot H = \rho \cdot g \cdot Q \cdot H = \frac{kg}{m^3}\frac{m}{s^2}\frac{m^3}{s}m\frac{kg \cdot m^2}{s^3} \tag{8.18}$$

Las revoluciones son una unidad de $1/T$. El resto de parámetros es muy sencillo y se expresa directamente.

A continuación se comprobará que las k magnitudes fundamentales son independientes:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \tag{8.19}$$

Magnitud física	Símbolo	M	L	T
Diámetro	D		1	
Densidad	ρ	1	-3	
Vel. rotación	n			-1
Potencia	P	1	2	-3
Salto neto	H	0	1	0
Gravedad	g	0	1	-2

Tabla 8.4: Expresión en $\{[M][L][T]\}$ de las magnitudes físicas del problema

Se obtienen los números adimensionales

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{8.20}$$

Las transformaciones realizadas han sido:

- La primera columna se queda como esta.
- La segunda columna es la suma de ella misma con la primera multiplicada por 3.
- La tercera columna es ella misma cambiada de signo.

Finalmente, los número adimensionales obtenidos se reflejan en la tabla 8.5.

Magnitud física	Símbolo	ρ	D	n	Π
Diámetro	D		1		
Densidad	ρ	1			
Vel. rotación	n			1	
Potencia	P	1	5	3	$\frac{P}{D^5 \rho n^3}$
Salto neto	H	0	1	0	$\frac{H}{D}$
Gravedad	g	0	1	2	$\frac{g}{Dn^2}$

Tabla 8.5: Expresión en $\{[\rho][D][n]\}$ de las magnitudes físicas del problema, y números adimensionales

Esta semejanza puede utilizarse para ver cual es la potencia de la bomba equivalente utilizada en un modelo a escala reducida.

8.3 Ecuación general de la hidráulica

A continuación va a exponerse como a través del análisis dimensional se llega a la expresión de la Ecuación General de la Hidráulica.

Las variables que intervienen en la hidráulica, son $n = 11$ y se pueden identificar en:

- Dimensiones:
  - Alto: a
  - Ancho: b
  - Largo: c
  - Rugosidad: k, asociado a fenómenos de contorno y turbulencia
- Variable cinemática, que puede ser la Velocidad: v o el caudal Q. Ambas ya estarían relacionadas por las magnitudes geométricas definidas
- Propiedades de los fluidos:
  - Peso específico: γ
  - Densidad: ρ
  - Viscosidad: μ
  - Tensión superficial: σ
  - Compresibilidad, o módulo de elasticidad volumétrico: E_v
- Presión: p

La ecuación general de la hidráulica queda entonces:

$$F\left(a,\, b,\, c,\, k,\, v,\, \gamma,\, \rho,\, \mu,\, \sigma,\, E_v,\, p\right) = 0 \tag{8.21}$$

En la tabla 8.6 se van a expresar estas magnitudes en un sistema de referencia $\{[M][L][T]\}$ de tres dimensiones $k = 3$, ya que la temperatura no se considera relevante, ni se necesitan magnitudes asociadas a la carga eléctrica.

En las tres primera filas de esta tabla, se han dispuesto las magnitudes físicas que se consideran fundamentales en un sistema hidráulico. Es aquí donde interviene el conocimiento de los procesos que se quieren modelizar para poder elegir adecuadamente estas variables. En este caso se han elegido una dimensión (calado y), la velocidad del fluido (v) y la densidad (ρ).

Se comprueba que estas tres magnitudes, expresadas en $\{[M][L][T]\}$ forman un sistema linealmente independiente entre si:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \tag{8.22}$$

Magnitud física	Símbolo	Ud	M	L	T	F	L	T
Alto	a	m		1			1	
Velocidad	v	m/s		1	-1		1	-1
Densidad	ρ	kg/m^3	1	-3		1	-4	2
Ancho	b	m		1			1	
Largo	c	m		1			1	
Rugosidad	k	m		1			1	
Peso específico	γ	N/m^3	1	-2	-2	1	-3	
Viscosidad	μ	$Pa \cdot s$	1	-1	-1	1	-2	1
Tensión superficial	σ	N/m	1		-2	1	-1	
Mod. elasticidad volum.	E_v	Pa	1	-1	-2	1	-2	
Presión	p	Pa	1	-1	-2	1	-2	

Tabla 8.6: Expresión en $\{[M][L][T]\}$ y $\{[F][L][T]\}$ de las magnitudes físicas intervinientes en la hidráulica

Por tanto, pueden ser elegidas como magnitudes fundamentales, sobre las que expresar las restantes $j = n - k = 11 - 3 = 8$.

Existen diversas formas de cálculo para resolver la transformación del sistema desde $\{[M][L][T]\}$ a $\{[y][v][\rho]\}$, cuando existen, como en este caso, pocas magnitudes básicas y muchas dependientes, lo más fácil es realizar una reducción del tipo Gauss aplicando los cambios al resto de la matriz ampliada.

Es decir, si partimos de la matriz de la izquierda en la ecuación (8.23), correspondiente a los coeficientes de la tabla 8.6, y haciendo las transformaciones siguientes:

- La primera columna se queda como esta.
- La segunda columna es la suma de la segunda y terceras.
- La tercera columna es ella misma pero cambiada de signo.

se llega a la matriz central, donde ya tenemos 2 filas de la matriz unitaria. Para conseguir la tercera debemos dejar un 1 en la primera columna y ceros en las demás. Para ello hacemos una nueva transformación dada por:

- La primera columna se queda como esta.
- La segunda columna es la suma de la primera columna multiplicada por 3 y ella misma.
- La tercera columna se queda como esta.

$$
\begin{array}{c}
a \\ v \\ \rho \\ b \\ c \\ k \\ \gamma \\ \mu \\ \sigma \\ E_v \\ p
\end{array}
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & -1 \\
1 & -3 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
1 & -2 & -2 \\
1 & -1 & -1 \\
1 & 0 & -2 \\
1 & -1 & -2 \\
1 & -1 & -2
\end{bmatrix}
\quad
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
1 & -3 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
1 & -4 & 2 \\
1 & -2 & 1 \\
1 & -2 & 2 \\
1 & -3 & 2 \\
1 & -3 & 2
\end{bmatrix}
\quad
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
1 & -1 & 2 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 0 & 2 \\
1 & 0 & 2
\end{bmatrix}
\tag{8.23}
$$

De esta forma se obtienen los coeficientes que nos permiten expresar las $n-k$ magnitudes no fundamentales a partir las k fundamentales. Estas expresiones se reflejan en la tabla 8.7.

Téngase en cuenta que como la matriz unitaria que se ha conseguido tenia el 1 correspondiente a la magnitud fundamental ρ en la primera columna, los coeficientes de esta columna serán los correspondientes a la densidad, la segunda columna son los coeficientes del calado y la tercera los asociados a la velocidad.

Magnitud física	Símbolo	ρ	y	v	Expresión	Nº adimensional
Alto	a		1		$\rho^0 a^1 v^0$	
Velocidad	v			1	$\rho^0 a^0 v^1$	
Densidad	ρ	1			$\rho^1 a^0 v^0$	
Ancho	b		1		$\rho^0 a^1 v^0$	$\Pi_1 = ba^{-1}$
Largo	c		1		$\rho^0 a^1 v^0$	$\Pi_2 = xa^{-1}$
Rugosidad	k		1		$\rho^0 a^1 v^0$	$\Pi_3 = ka^{-1}$
Peso específico	γ	1	-1	2	$\rho^1 a^{-1} v^2$	$\Pi_4 = \gamma\rho^{-1}a^1 v^{-2}$
Viscosidad	μ	1	1	1	$\rho^1 a^1 v^1$	$\Pi_5 = \mu\rho^{-1}a^{-1}v^{-1}$
Tensión superficial	σ	1	1	2	$\rho^1 a^1 v^2$	$\Pi_6 = \sigma\rho^{-1}a^{-1}v^{-2}$
Mod. elasticidad volum.	E_v	1		2	$\rho^1 a^0 v^2$	$\Pi_7 = E_v\rho^{-1}v^{-2}$
Presión	p	1	0	2	$\rho^1 a^0 v^2$	$\Pi_8 = p\rho^{-1}v^{-2}$

Tabla 8.7: Expresión en $\{[\rho][y][v]\}$ de las magnitudes físicas intervinientes en la hidráulica

La expresión como número adimensional Π_1 del valor del ancho b implica que:

$$\Pi_1 = b\rho^l a^m v^n \tag{8.24}$$

es adimensional. Para ello el valor de los coeficientes (l, m, n) se corresponde con el obtenido anteriormente cambiado de signo.

Este es el criterio aplicado en la última columna de la tabla 8.7 para los 8 parámetros derivados.

La ecuación dada en (8.21) se transforma en:

$$\Phi\left(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5, \Pi_6, \Pi_7, \Pi_8\right) = 0 \tag{8.25}$$

Con lo que hemos reducido un sistema de 11 variables a 8, lo que tiene una gran importancia en el cálculo.

Si se hubiera partido de un sistema $\{[F][L][T]\}$ en vez de $\{[M][L][T]\}$ el resultado hubiera sido el mismo. Los coeficientes correspondientes al sistema $\{[F][L][T]\}$ de las mismas magnitudes dadas en la tabla 8.6 se corresponden con los mostrados en la matriz de la izquierda de la ecuación(8.26). Para llegar a la matriz de la derecha se realizan las transformaciones:

- La primera columna se queda como esta.
- La segunda columna es la suma de la primera columna multiplicada por 4 y ella misma.
- La tercera columna es la suma de la primera columna multiplicada por -2 y ella misma.

para conseguir la matriz central. De esta a la matriz de la derecha hacemos las transformaciones:

- La primera columna se queda como esta.
- La segunda columna es la suma de la tercera columna y ella misma.
- La tercera columna es ella misma cambiada de signo.

$$\begin{array}{c} \\ a \\ v \\ \rho \\ b \\ c \\ k \\ \gamma \\ \mu \\ \sigma \\ E_v \\ p \end{array}
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}
\quad
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}
\quad
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{8.26}$$

8.3.1 Interpretación de los monomios adimensionales

Antes de proceder a la interpretación de cada uno de los monomios adimensionales se van a introducir las fuerzas actuantes en los problemas hidráulicos, ya que a través de ellas podemos realizar una interpretación física de los mismos. Estas fuerzas son:

F_g	Fuerzas de gravedad	$F_g = m \cdot g = \rho L^3 g$
F_p	Fuerzas de presión	$F_p = A \cdot \Delta p = \Delta p L^2$
F_μ	Fuerzas de viscosidad	$F_\nu = \mu \frac{dv}{dy} A = \mu \frac{v}{L} L^2 = \mu v L = \rho \nu v L$
F_E	Fuerzas debidas a la elasticidad (compresibilidad)	$F_E = E_v \cdot A = E_v \cdot L^2$
F_σ	Fuerzas debidas a la tensión superficial	$F_\sigma = \sigma L$
F_I	Fuerzas de inercia	$F_I = m \cdot g = \rho L^3 \frac{L}{T^2} = \rho L^4 T^{-2} = \rho v^2 L^2$

Hay que tener en cuenta que un monomio sigue siendo adimensional si tomamos el valor inverso del mismo.

Los dos primeros monomios ($\Pi_1 = b/a$) y ($\Pi_2 = c/a$) son una simple relación de magnitudes geométricas.

El tercero ($\Pi_3 = k/a$) expresa la rugosidad relativa. Este parámetro aparece, por ejemplo, en la ecuación de Darcy-Weisbach cuando quiere evaluarse la f de Darcy. Suele ser difícil en un modelo a escala el conseguir un material capaz de mantener la rugosidad relativa, especialmente si la relación de escalas es elevada.

Para el resto de monomios existe una interpretación física muy interesante basada en la relación de fuerzas actuante predominante en cada uno de los modelo hidráulicos.

8.3.2 Número de Froude

El monomio:

$$\Pi_4 = \frac{\gamma a}{\rho v^2} = \frac{\rho g a}{\rho v^2} = \frac{g a}{v^2} = \frac{1}{F^2} \tag{8.27}$$

siendo F^2 el número de Froude al cuadrado. Este número es fundamental en la hidráulica para la separación del tipo de régimen en la circulación del agua en lámina libre.

Este número puede obtenerse también por la relación entre las fuerzas de inercia y gravedad, así:

$$\frac{F_I}{F_g} = \frac{\rho v^2 L^2}{\rho g L^3} = \frac{v^2}{g \cdot L} \tag{8.28}$$

Este número es debido a los estudios realizados por William Froude para determinar la resistencia de los barcos al avance entre las olas. Para ello realiza experimentos con placas arrastradas por el agua.

En el caso de los buques la magnitud geométrica de longitud es la eslora del buque, mientras que en la hidráulica de canales se considera el calado y.

El término $c^2 = g \cdot y$, siendo y el calado, se corresponde además con la celeridad de una onda de gravedad en superficie libre y aguas poco profundas. Por tanto el Número de Froude nos da la relación entre la velocidad del fluido (v) y la velocidad de la onda de gravedad (c) y justifica el comportamiento de los frentes de onda en canales.

8.3.3 Número de Reynolds

El monomio:

$$\Pi_5 = \frac{\mu}{\rho a v} = \frac{\nu}{a v} = \frac{1}{R_e} \tag{8.29}$$

siendo R_e el número de Reynolds.

Este número puede obtenerse también por la relación entre las fuerzas de inercia y viscosidad, así:

$$\frac{F_I}{F_\nu} = \frac{\rho v^2 L^2}{\rho \nu v L} = \frac{v \cdot L}{\nu} \tag{8.30}$$

Este número es debido a Osborne Reynolds (1882), aunque la relación dinámica de fuerzas es debida a Lord Rayleigh 10 años más tarde.

En el caso de tuberías este número se expresa como $R_e = \frac{v \cdot D}{\nu}$ donde el diámetro D sustituye a la magnitud geométrica de longitud.

8.3.4 Número de Weber

El monomio:

$$\Pi_6 = \frac{\sigma}{\rho a v^2} = \frac{1}{W_e^2} \tag{8.31}$$

Este número puede obtenerse también por la relación entre las fuerzas de inercia y tensión superficial, así:

$$\frac{F_I}{F_\sigma} = \frac{\rho v^2 L^2}{\sigma L} = \frac{v^2}{\frac{\sigma}{\rho L}} = W_e^2 \tag{8.32}$$

siendo $W_e = \frac{v}{\sqrt{\frac{\sigma}{\rho L}}}$ el número de Weber.

Este número es debido a Moritz Weber, que desarrollo las leyes de semejanza moderna. Una aplicación práctica, donde este número es importante, es el estudio del frente de onda de una lámina de agua muy fina que fluye sobre una superficie. Este caso se produce en las playas sin pendiente donde un pequeño frente avanza por encima de un lámina de agua muy fina, sin apenas calado.

8.3.5 Número de Cauchy. Número de Match

El monomio:

$$\Pi_7 = \frac{E_v}{\rho v^2} = \frac{1}{C_a} = \frac{1}{M_a^2} \tag{8.33}$$

Este número puede obtenerse también por la relación entre las fuerzas de inercia y la elásticas, así:

$$\frac{F_I}{F_E} = \frac{\rho v^2 L^2}{E_v L^2} = \frac{v^2}{E_v/\rho} = c_a = M_a^2 \tag{8.34}$$

siendo C_a es el numero de Cauchy, y M_a el número de Match. Este último se utiliza en gases compresibles con comportamiento adiabático. Téngase en cuenta que no se ha considerado la temperatura como una variable de este problema.

El número de Cauchy se utiliza en problemas de golpe de ariete donde la compresibilidad del fluido es importante.

Este número es debido a Ernst Match, y es muy utilizado en la mecánica de fluidos aplicada al campo de la aeronáutica, ya que expresa la relación entre la velocidad, y la velocidad del sonido en el medio. Ello permite separar los flujos entre subsónico, sónico y supersónico en función de que sean inferiores, iguales o superiores a la velocidad el sonido en el medio.

8.3.6 Número de Euler

El monomio:

$$\Pi_8 = \frac{p}{\rho v^2} = \frac{1}{2E_u^2} \tag{8.35}$$

Este número puede obtenerse también por la relación entre las fuerzas de inercia y presión, así:

$$\frac{F_I}{2F_p} = \frac{\rho v^2 L^2}{2\Delta p L^2} = \frac{v^2}{2\frac{\Delta p}{\rho}} = E_u^2 \tag{8.36}$$

siendo $E_u = \frac{v}{\sqrt{2(\Delta p/\rho)}} = \frac{v}{\sqrt{2g(\Delta p/\gamma)}}$ el número de Euler.

Este número es debido a Leonhard Euler. Este número permanece constante para cualquier forma de contorno en un fluido en el que únicamente actúen las fuerzas de inercia y presión.

Al valor $C_p = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho v^2} = \frac{1}{E_u^2}$ se le conoce como **coeficiente de presión**.

Si el Δp se mide tomando como referencia la presión de vapor p_v se obtiene $C_a = \frac{p - p_v}{\frac{1}{2}\rho v^2}$ conocido como el **número de cavitación**, de gran importancia en bombas ya que permite obtener la altura máxima teórica a la que se puede disponer la misma.

8.3.7 Expresión reducida de la Ecuación General de la Hidráulica

Tras el análisis dimensional llevado a cabo, junto con la interpretación física de los distintos parámetros, la ecuación (8.25) puede expresarse como:

$$\Phi\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{k}{a}, F, R_e, W_e, M_a, E_u\right) = 0 \tag{8.37}$$

Ahora bien, si lo que estamos estudiando es un problema donde la tensión superficial, ni la cavitación, ni el flujo supersónico son relevantes, se pueden eliminar los tres últimos parámetros, reduciéndose la ecuación (8.37) a:

$$\Phi\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{k}{a}, F, R_e\right) = 0 \tag{8.38}$$

Si estudiamos un problema de circulación en tuberías en presión, donde no existe la superficie libre, también podría eliminarse el término debido al número de Froude. Lo mismo ocurre si estudiamos el movimiento bajo el agua de un submarino a profundidad suficiente para que este desplazamiento no produzca una perturbación en la superficie libre.

En el caso de circulación en lámina libre, por ejemplo en canales, el efecto de la viscosidad es despreciable, siempre que el número de Reynolds sea elevado, y por tanto puede eliminarse ese término de la ecuación.

En todos los casos anteriormente enunciados, y aplicando las simplificaciones expuestas se ha conseguido reducir la Ecuación General de la Hidráulica a 4 parámetros fundamentales frente a los 11 de partida.

La importancia de esta reducción radica en el número de casos a estudiar si queremos conocer la influencia de la variación de una de las magnitudes intervinientes en el problema sobre las demás. Supongamos que de cada magnitud hagamos 5 variaciones. Con el sistema de 11 variables tendríamos $5^{11} = 48,828,125$ casos a estudiar, mientras que con un sistema de 4 magnitudes, este número sería $5^4 = 625$ casos.

8.3.8 Importancia de los monomios adimensionales en distintos problemas

La tabla 8.8 muestra los cinco últimos números adimensionales, con su nombre asociado, la relación de fuerzas implicadas en su obtención y el campo de la hidráulica donde su consideración es más relevante.

Magnitud física	Definición	Magnitudes relacionadas	Importancia hidráulica
Nº Froude	$F^2 = \frac{v^2}{c^2}$	$\frac{F_{inercia}}{F_{gravedad}}$	Superficie libre
Nº Reynolds	$R_e = \frac{\rho D}{\nu}$	$\frac{F_{inercia}}{F_{viscosidad}}$	Siempre
Nº Weber	$W_e = \frac{\rho v L}{\gamma}$	$\frac{F_{inercia}}{F_{tensionsuperficial}}$	Superficie libre
Nº Match	$M_a = \frac{v}{a}$	$\frac{F_{inercia}}{F_{elasticas}}$	Fluidos compresibles
Nº Euler	$C_a = \frac{p-p_0}{\rho v}$	$\frac{F_{inercia}}{F_{presion}}$	Cavitación

Tabla 8.8: Números adimensionales destacables en la hidráulica

8.4 Semejanza hidráulica

8.4.1 Introducción

Como ya se ha dicho antes, el coste de construcción de algunas obras es muy elevado, y el comportamiento real ante determinadas situaciones puede poseer un grado de incertidumbre que puede verse muy reducido con la modelización previa a la construcción de un modelo a escala.

Supongamos que queremos construir el aliviadero de una presa. Este se ha previsto para la diferentes hipótesis de funcionamiento. Por ejemplo, en la avenida de proyecto, avenida extrema, actuación de los desagües de fondo y los intermedios. Si este aliviadero no es de labio fijo sino que funciona sin compuertas, la complejidad es aún mayor. El problema puede agravarse si tiene mas de un vano, ya que el caudal desaguado además de depender de la apertura de compuerta y del nivel del embalse es también función de la apertura de los vanos contiguos. En general en este tipo de problemas es muy importante evaluar la disipación de energía que se produce antes de la restitución del flujo de agua al rio, ya que un mal diseño puede originar regímenes rápidos en la salida del cuenco amortiguador y una socavación en el lecho del rio con la consecuente pérdida de materiales. Esto puede llevar a una pérdida de seguridad en la presa.

El diseño del cuenco amortiguador es fundamental en este proceso, y la evaluación de las pérdidas de energía muy difícil de obtener, especialmente si el aliviadero es escalonado, con pendiente variable, curva, reducción de sección etc.

El coste de realización de un modelo a escala en el total de la obra es muy reducido y se pueden obtener grandes beneficios, incluida la disminución del coste de ejecución al permitir optimizar el diseño. Hay que tener en cuenta que en el ejemplo expuesto es posible que tengan que pasar muchos años antes de llegar a la avenida de proyecto y quizá no se alcance nunca la avenida extrema (lo que mas bien sería deseable), con lo cual, si no se ha realizado antes un modelo difícilmente podremos comprender la importancia de estas situaciones. El modelo permite además, observar y medir, el comportamiento de situaciones más allá de las establecidas por la propia normativa, como pueden ser el funcionamiento simultaneo de todos los órganos de desagüe, la avería total o parcial de una o varias compuertas, etc. De esta forma el modelo servirá para establecer parte de las directivas contempladas en las normas de explotación que afectan directamente a la seguridad de la presa.

El problema se plantea en la forma de llevar a cabo esta reducción de escala de manera que el modelo se asemeje en comportamiento al prototipo al que quiere representar.

8.4.2 Tipos de semejanza

Se llama **Semejanza** a la relación existente entre una magnitud física en el prototipo y el modelo expresada en las mismas unidades. Se utiliza la variable λ para expresar esta relación de semejanza. Así:

$$\lambda_L = \frac{L_P}{L_m} \tag{8.39}$$

es la razón de semejanza entre dos longitudes de una misma medida en el prototipo (L_P) y el modelo (L_m).

Cada una de las magnitudes físicas del problema se reproducirá en el modelo a través de su relación de escala. Si esta es una magnitud derivada, se puede a su vez expresar en función de las

fundamentales. Por ejemplo el caudal:

$$\lambda_Q = \frac{Q_P}{Q_m} = \frac{\frac{L_P^3}{t_P}}{\frac{L_m^3}{t_m}} = \frac{L_P^3}{L_m^3}\frac{t_P}{t_m} = \frac{\lambda_L^3}{\lambda_t} \tag{8.40}$$

siendo $\lambda_t = \frac{t_P}{t_m}$ la relación entre el tiempo utilizado en el prototipo y el modelo.

En un modelo tendremos una **semejanza mecánica** cuando tengamos la vez semejanza geométrica, cinemática y dinámica. A continuación se definen estos conceptos

Un modelo poseerá **semejanza geométrica** cuando todas las longitudes se encuentran afectadas por el mismo factor de escala λ_L. En este caso se respetarán los ángulos entre los distintos puntos del modelo.

Puede ser que un modelo posea una distorsión de escala geométrica entre la vertical y la horizontal. Entonces, se tendrían dos factores de escala λ_{Lh} y λ_{Lv} para cada una de las longitudes. En este caso solo se respetarán los ángulos comprendidos dentro de un mismo plano horizontal.

Un modelo más complejo, en el que intervengan otras unidades además de la longitud, como puede ser la velocidad, puede cumplir la existencia de una **semejanza cinemática**. En este caso los vectores velocidad del fluido en el prototipo son proporcionales a su vector velocidad correspondiente en el modelo, a este razón de proporcionalidad le denominaremos λ_v.

Cuando además existen fuerzas aplicadas al modelo es conveniente adoptar una **semejanza dinámica**, cuyo factor de proporcionalidad llamaremos λ_F. Este es un factor de proporcionalidad geométrica que se aplica entre el polígono de fuerzas actuantes sobre una partícula del prototipo y del modelo.

El problema en la mecánica de fluidos radica en operar de forma conjunta con todas las fuerzas. Estas se han introducido con anterioridad para explicar los interpretación física de las monomios adimensionales, y son:

F_g	Fuerzas de gravedad	$F_g = m \cdot g = \rho L^3 g$
F_p	Fuerzas de presión	$F_p = A \cdot \Delta p = \Delta p L^2$
F_μ	Fuerzas de viscosidad	$F_\nu = \mu \frac{dv}{dy} A = \mu \frac{v}{L} L^2 = \mu v L = \rho \nu v L$
F_E	Fuerzas debidas a la elasticidad (compresibilidad)	$F_E = E \cdot A = E \cdot L^2$
F_σ	Fuerzas debidas a la tensión superficial	$F_\sigma = \sigma L$
F_I	Fuerzas de inercia	$F_I = m \cdot g = \rho L^3 \frac{L}{T^2} = \rho L^4 T^{-2} = \rho v^2 L^2$

Las fuerzas de inercia son las que se oponen a la variación del movimiento por la aplicación de algunas de las fuerzas anteriores. La ecuación de equilibrio de fuerzas puede escribirse como:

$$\sum F = F_g + F_p + F_\mu + F_E + F_\tau = -F_I \qquad \rightarrow \qquad F_g + F_p + F_\mu + F_E + F_\tau + F_I = 0 \tag{8.41}$$

La dificulta radica en que no se puede mantener la semejanza dinámica para todas las fuerzas actuantes sobre el modelo hidráulico. Existen limitaciones que se presentan a la hora de poder variar mediante una relación de escala, algunos de los parámetros intervinientes en el problema. El ejemplo más claro es la gravedad, pero no el único, ya que la presión también es difícil alterarlo. Se ha podido

realizar en algunos ensayos utilizando una cámara isobárica. La sustitución del fluido a ensayar por otro de distinta viscosidad mas ajustado a la reducción de escalas dependerá de la disponibilidad de éste para los volúmenes y caudales requeridos en el ensayo. Adicionalmente pueden ser necesarios equipos de bombeo capaces de manejar este fluido si hay que ponerlo en movimiento.

Observemos ahora los monomios adimensionales más habitualmente utilizados en los problemas de hidráulica, el número de Froude y el número de Reynolds dados en las ecuaciones (8.28) y (8.29) respectivamente. Si mantenemos las viscosidad del fluido, y evidentemente la gravedad, es imposible satisfacer de forma conjunta ambas ecuaciones. Esto implica que a la hora de realizar un modelo a escala, debe evaluarse el fenómeno físico predominante, gravedad o viscosidad, y realizar el modelo sobre la base del mantenimiento de la relación predominante. Finalmente se comprobará que el error cometido con la simplificación realizada no tiene gran influencia en el modelo.

Por ejemplo en el caso de los modelos predominados por la gravedad, como es el caso del aliviadero anteriormente expuesto, la existencia de números de Reynolds elevados hace que la viscosidad pierda importancia. En cambio el hecho de que un modelo tenga un comportamiento laminar frente a un prototipo con comportamiento turbulento haría inadmisible esta simplificación por que el cambio en las condiciones hidráulicas sería notable.

En los modelos en lámina libre donde se adopta para la transformación de escalas el número de Froude, habrá de tenerse en cuenta que no haya zonas donde el calado sea inferior a 3 cm ya que los fenómenos de tensión de superficial tendrían también gran importancia sobre el modelo.

Las dos razones anteriormente enunciadas hacen que la adopción de la escala más grande posible en función de la ubicación, caudales disponibles, etc, donde se vaya a realizar el ensayo, sea lo más favorable para reducir la influencia de estos fenómenos. Es evidente que una relación de escala de 1:1 entre prototipo y modelo consigue la semejanza perfecta entre ambos.

Como posible solución para mantener un flujo turbulento en un modelo a escala realizado con semejanza de Froude puede realizarse una distorsión de escala entre la horizontal y la vertical aumentando esta última de manera que las pérdidas de energía sean equivalentes. El disminuir la rugosidad ayuda también en este sentido pero suele ser difícil encontrar materiales lo suficientemente lisos.

8.4.3 Semejanza de Froude

Se utiliza cuando tenemos problemas con superficie libre donde las fuerzas predominantes son las gravitatorias. Como ejemplos pueden tenerse los problemas de oleaje, canales, vertederos, resaltos, desagües etc.

Supongamos que utilizamos λ para expresar la relación geométrica entre las dimensiones del prototipo L y del modelo L':

$$\lambda = \frac{L}{L'} \tag{8.42}$$

El valor de λ es lo que constituye la relación de escala entre ambos. Ahora bien si utilizamos una

semejanza de Froude estamos afirmando que el monomio adimensional dado por:

$$F^2 = \frac{v^2}{gL} \tag{8.43}$$

permanece constante entre el prototipo y el modelo. Ello implica que:

$$F^2 = \frac{v^2}{gL} = \frac{v'^2}{g'L'} = \text{cte} \qquad \rightarrow \qquad \frac{v^2}{v'^2} = \frac{g}{g'}\frac{L}{L'} \tag{8.44}$$

como no vamos a poder variar con facilidad las condiciones de gravedad (g) entre el prototipo y el modelo, hemos supuesto ésta constante, lo que implica que:

$$\frac{g}{g'} = 1 \qquad \rightarrow \qquad \frac{v^2}{v'^2} = \frac{L}{L'} = \frac{L}{\frac{L}{\lambda}} = \lambda \qquad \rightarrow \qquad \frac{v}{v'} = \sqrt{\lambda} \tag{8.45}$$

Conocida la longitud y la velocidad el tiempo es una magnitud derivada, por tanto:

$$t = \frac{L}{v} \qquad \rightarrow \qquad \frac{t}{t'} = \frac{\frac{L}{L'}}{\frac{v}{v'}} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{\lambda} \tag{8.46}$$

El caudal es una unidad derivada de la longitud (volumen) y el tiempo, dada por:

$$Q = \frac{L^3}{t} \qquad \rightarrow \qquad \frac{Q}{Q'} = \frac{\frac{L^3}{L'^3}}{\frac{t}{t'}} = \frac{\lambda^3}{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{\lambda^5} \tag{8.47}$$

La única unidad fundamental que no hemos expresado es la masa (M), que si la obtenemos a través de la densidad (ρ) y el volumen (V) como:

$$M = \rho V \qquad \rightarrow \qquad \frac{M}{M'} = \frac{\rho}{\rho'}\frac{L^3}{L'^3} = \frac{\rho}{\rho'}\lambda^3 \tag{8.48}$$

siendo ρ y ρ' las densidades en el prototipo y modelo respectivamente. En el caso de que el fluido sea el mismo, lo que es bastante habitual, se tendría la relación de escalas para la masa dada por:

$$\frac{M}{M'} = \lambda^3 \tag{8.49}$$

Ejemplo

Semejanza de Froude

Para ensayar el aliviadero de una presa se ha construido un modelo a escala 1:50. Calcule el rango de caudales en el modelo si los caudales a ensayar en la estructura real oscilan entre 1500 m^3/s y 2030 m^3/s. Obtenga además la rugosidad que debe tener el material del modelo para conservar el número de Manning si este es de 0.014 en el prototipo.

Las escalas utilizadas, sabiendo que ha de mantenerse el número de Froude, el valor de la gravedad y el fluido circulante (agua) tanto en el prototipo (p) como en el modelo (m), son:

$$\lambda_l = \frac{L_p}{L_m} = 50\,; \qquad \frac{g_p}{g_m} = 1\,; \qquad \frac{\rho_p}{\rho_m} = 1 \tag{8.50}$$

$$F^2 = \frac{v_p^2}{g_p L_p} = \frac{v_m^2}{g_m L_m} = \text{cte} \qquad \rightarrow \qquad \frac{v_p^2}{v_m^2} = \frac{g_p}{g_m}\frac{L_p}{L_m} = \lambda_l \qquad \rightarrow \qquad \frac{v_p}{v_m} = \sqrt{\lambda_l} \tag{8.51}$$

Los caudales los obtenemos como $Q = VS$, por tanto:

$$\frac{Q_p}{Q_m} = \frac{v_p}{v_m}\frac{L_p^2}{L_m^2} = \sqrt{\lambda}\lambda^2 = \sqrt{\lambda^5} = 50^{5/2} = 17677,67 \tag{8.52}$$

Finalmente, se tiene:

$$Q_m = \frac{Q_m}{50^{5/2}} \begin{cases} Q_{m_1} = \frac{1500}{50^{5/2}} = 0.08485\, m^3/s = 84.85\, l/s \\ Q_{m_2} = \frac{2030}{50^{5/2}} = 0.11483\, m^3/s = 114.83\, l/s \end{cases} \tag{8.53}$$

A continuación se comprobará la rugosidad que debería tener el material a utilizar en el modelo para que sea equivalente a la del prototipo.

$$\frac{n_p}{n_m} = \frac{v_m}{v_p}\sqrt{\frac{y_p}{y_m}\frac{R_{H_p}^{4/3}}{R_{H_m}^{4/3}}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{\lambda\lambda^{4/3}} = \lambda^{4/6} = \lambda^{2/3} = 50^{2/3} = 13.572 \tag{8.54}$$

$$n_m = \frac{n_p}{\lambda^{2/3}} = \frac{0.014}{50^{2/3}} = 0.00103 \tag{8.55}$$

En caso de no poder conseguirse este material, puede distorsionarse la escala vertical para conseguir que la energía en el vertido permanezca constante entre el prototipo y el modelo.

8.4.4 Semejanza de Reynolds

La viscosidad es un fenómeno presente en todos los problemas hidráulicos, pero su importancia disminuye a medida que el contorno tiene menos importancia, como es el caso de las grandes masas de agua, o cuando tenemos números de Reynolds muy elevados, lo que es habitual en regímenes turbulentos desarrollados. En este caso, el valor de vD es muy grande frente a la viscosidad, y su variación no tendrá gran influencia en el problema a estudio. En el ábaco de Moody nos estaríamos moviendo en la zona horizontal donde apenas se produce variación en la f de Darcy.

Por el contrario, si en el prototipo estamos en un régimen turbulento y en el modelo se produjera régimen laminar, los errores cometidos podrían ser muy elevados invalidando la razón de semejanza adoptada.

De nuevo, se utilizará el valor de λ para expresar la relación de escala geométrica entre prototipo y modelo. Con la semejanza de Reynolds el monomio adimensional que permanece constante esta dado por:

$$R_e = \frac{v \cdot D}{\nu} = \text{cte} \qquad \rightarrow \qquad \frac{v}{v'} = \frac{D'}{D}\frac{\nu}{\nu'} \tag{8.56}$$

Si el fluido entre prototipo y modelo es el mismo se tiene:

$$\frac{\nu}{\nu'} = 1 \qquad \rightarrow \qquad \frac{v}{v'} = \frac{D'}{D} = \frac{1}{\lambda} \tag{8.57}$$

Igual que en el caso anterior, conocida la longitud y la velocidad el tiempo es una magnitud derivada, por tanto:

$$t = \frac{L}{v} \qquad \rightarrow \qquad \frac{t}{t'} = \frac{\frac{L}{L'}}{\frac{v}{v'}} = \frac{\lambda}{\frac{1}{\lambda}} = \lambda^2 \tag{8.58}$$

El caudal es una unidad derivada de la longitud (volumen) y el tiempo, dada por:

$$Q = \frac{L^3}{t} \qquad \rightarrow \qquad \frac{Q}{Q'} = \frac{\frac{L^3}{L'^3}}{\frac{t}{t'}} = \frac{\lambda^3}{\lambda^2} = \lambda \tag{8.59}$$

La masa (M), se obtiene a través de la densidad (ρ) y el volumen (V) como:

$$M = \rho V \qquad \rightarrow \qquad \frac{M}{M'} = \frac{\rho}{\rho'}\frac{L^3}{L'^3} = \frac{\rho}{\rho'}\lambda^3 \tag{8.60}$$

siendo ρ y ρ' las densidades en el prototipo y modelo respectivamente, que al ser el fluido el mismo, se tiene que la relación de escalas para la masa esta dada por:

$$\frac{M}{M'} = \lambda^3 \tag{8.61}$$

Ejemplo

Semejanza de Reynolds

Se quiere estudiar en un modelo a escala el comportamiento de un acuífero confinado, del que se quiere extraer un caudal de 100 l/s. Sabiendo que la permeabilidad k es en el prototipo es 10^{-5}. Calcular la permeabilidad que habrá que darle al modelo y el caudal extraído cuando la escala del modelo es 1:10.

Utilizando la relación de caudales obtenida anteriormente, se tiene:

$$Q_m = \frac{Q_p}{\lambda} = \frac{Q_p}{10} = \frac{100}{10} = 10 \text{ l/s} \tag{8.62}$$

La permeabilidad puede obtenerse de la relación dada en la Ley de Darcy:

$$Q = kS\frac{\Delta H}{L} \quad \rightarrow \quad k = \frac{QL}{S\Delta H} \quad \rightarrow \quad \frac{k_p}{k_m} = \frac{Q_p}{Q_m}\frac{L_p}{L_m}\frac{S_m}{S_p}\frac{\Delta H_m}{\Delta H_p} = \lambda\lambda\frac{1}{\lambda^2}\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \tag{8.63}$$

Por tanto, debe disponerse de un material para realizar el modelo cuya permeabilidad sea:

$$k_m = \frac{k_p}{\frac{1}{\lambda}} = \frac{k_p}{1/10} = 10^{-5} \cdot 10 = 10^{-4}\text{m/s} \tag{8.64}$$

Ejemplo

Semejanza de Froude y Reynolds

Se quiere estudiar en un modelo a escala que cumpla de forma conjunta con las semejanzas de Froude y Reynolds. Para ello se pretende sustituir el fluido en circulación por otro con igual densidad. Determinar las características de viscosidad del nuevo fluido para cumplir ambas semejanzas.

Si se mantiene las relaciones de semejanza obtenidas de Froude, se tiene:

$$\frac{L_p}{L_m} = \lambda\,; \qquad \frac{v_p}{v_m} = \sqrt{\lambda}\,; \qquad \frac{t_p}{t_m} = \sqrt{\lambda}\,; \tag{8.65}$$

Que se cumpla que la semejanza de Reynolds implica que:

$$\frac{R_{e_p}}{R_{e_m}} = 1 = \frac{\frac{v_p \cdot D_p}{\nu_p}}{\frac{v_m \cdot D_m}{\nu_m}} = \frac{v_p}{v_m}\frac{D_p}{D_m}\frac{\nu_m}{\nu_p} = \lambda\sqrt{\lambda}\frac{\nu_m}{\nu_p} \tag{8.66}$$

Despejando:

$$\frac{\nu_p}{\nu_m} = \lambda\sqrt{\lambda} = \lambda^{3/2} \tag{8.67}$$

Aplicando este valor para diferentes escalas se obtiene que los fluidos del modelo, supuesto el agua circulando en el prototipo ($\nu = 10^{-6}$), deberían ser:

$$\lambda = 10 \quad \rightarrow \quad \nu_m = \frac{10^{-6}}{10^{3/2}} = 3.16 \cdot 10^{-8} \tag{8.68}$$

$$\lambda = 20 \quad \rightarrow \quad \nu_m = \frac{10^{-6}}{20^{3/2}} = 1.12 \cdot 10^{-9} \tag{8.69}$$

$$\lambda = 40 \quad \rightarrow \quad \nu_m = \frac{10^{-6}}{40^{3/2}} = 3.95 \cdot 10^{-9} \tag{8.70}$$

Estos valores son muy difíciles de conseguir y deben circular por el sistema de bombeo que tengamos dispuesto para el ensayo

8.4.5 Relaciones de escala en problemas de semejanza

En la tabla 8.9 se describen las relaciones de escala cuando se adopta una semejanza de Froude, Reynolds, Weber o Mach para las magnitudes más habituales en la hidráulica, cuando se considera constante el valor de la gravedad (g) y se utiliza λ como coeficiente de escala geométrica

Magnitud física	Dimensión	Ley de semejanza adoptada			
		Froude	Reynolds	Weber	Match
Longitud	L	λ	λ	λ	λ
Area	L^2	λ^2	λ^2	λ^2	λ^2
Volumen	L^3	λ^3	λ^3	λ^3	λ^3
Tiempo	T	$\sqrt{\lambda}$	λ^2	λ	$\sqrt{\lambda^3}$
Velocidad	LT^{-1}	$\sqrt{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda}$	1	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$
Aceleración	LT^{-2}	1	$\frac{1}{\lambda^3}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Caudal	L^3T^{-1}	$\sqrt{\lambda^5}$	λ	λ^3	$\sqrt{\lambda^3}$
Presión	$ML^{-1}T^{-2}$	λ	$\frac{1}{\lambda^2}$	1	$\frac{1}{\lambda}$
Energía	ML^2T^{-2}	λ^4	λ	λ^3	λ^2
Fuerza	MLT^{-2}	λ^3	1	λ^2	λ

Tabla 8.9: Relaciones de semejanza con distintas leyes

El medio poroso

IX

9.1 Introducción

Una parte importante de la hidráulica dentro de la ingeniería civil consiste en la construcción de estructuras de contención de agua. Algunas de ellas están realizadas con materiales permeables, por ejemplo las presas de materiales sueltos.

En otras obras, aparentemente impermeables, como las presas de gravedad realizadas con hormigón también existe el fenómeno de filtración de agua, que aunque puede considerarse pequeño debe ser controlado.

En general un problema importante es el que se puede producir a través de los terrenos de cimentación de las presas por la influencia que tiene sobre la estabilidad de ésta.

Otro ejemplo de porqué es necesario conocer la red de filtración a través de un medio poroso es el transporte de contaminantes, que diluidos en el agua pueden circular con él pudiendo contaminar pozos, zonas de cultivo, etc.

También, el conocimiento del flujo en el interior de los acuíferos es un dato primordial a la hora de dimensionar las extracciones o recargas de agua mediante pozos. De esta forma se puede establecer un adecuado equilibrio hidráulico.

9.2 El medio poroso

Un medio poroso consiste en una parte sólida con una cantidad grande de poros microscópicos en su interior más las gargantas o huecos entre ellos. Esta red de estrechos conductos es el camino por donde el fluido puede atravesar el medio. Una composición de suelo y la arena son ambos ejemplos de medios porosos. El flujo del líquido en un medio poroso se puede entender al imaginarnos una taza de agua que se vierte sobre el terreno y como esta fluye a través del medio debido a las fuerzas gravitacionales.

La descripción del flujo en medios porosos es extremadamente difícil debido a la complejidad del mismo. Aunque el flujo a través de una conducción se puede determinar por ecuaciones simples, cuando se considera la red de canalizaciones de un medio poroso, esta no es conocida, lo que añade

un alto grado de incertidumbre en el cálculo.

Para el estudio de los medios porosos, no se considera el detalle, sino que se toman las características medias de una zona de terreno homogénea. No se suelen considerar muestras de terreno inferiores a un metro por el error que se puede introducir al determinar las características medias. En caso de que la granulometría del medio fuera de gran tamaño la muestra debería ser, evidentemente, mayor.

Hay varios parámetros importantes que describen las características medias de un medio poroso:

- La porosidad n es la fracción de volumen del medio ocupada por los poros

$$n = \frac{V_h}{V_t} \tag{9.1}$$

  siendo el volumen total V_t el volumen de huecos (V_h) más el volumen de sólido (V_s). Por lo tanto, la porosidad estará comprendida entre cero (no hay huecos en el volumen) y uno (todo huecos, sin sólido)

  Evidentemente, para medios porosos formados por piezas grandes, por ejemplo escolleras de varios centímetros de diámetro medio, un volumen de 1 m^3 puede no ser suficiente para describir la porosidad media.

  La porosidad media, una vez determinada, es utilizada con frecuencia para la descripción de la totalidad del medio en que nos encontramos.

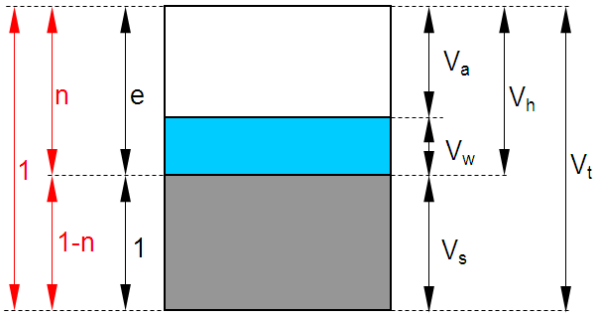


Figura 9.1: Caracterización del medio poroso

- El índice de poros e, es una definición equivalente a la anterior y con una relación biunívoca con esta. Se define como el volumen de huecos sobre el volumen de sólido.

$$e = \frac{V_h}{V_s} \tag{9.2}$$

  Las equivalencias entre ambas medidas puede verse en la figura 9.1, y se expresan matemáticamente mediante las relaciones:

$$n = \frac{e}{1+e}\,; \qquad e = \frac{n}{1-n} \tag{9.3}$$

- La permeabilidad K. Este parámetro describe la capacidad del fluido, generalmente agua, para fluir a través del medio poroso. Como se verá más adelante, depende de la geometría del medio más las características del fluido que lo atraviesa.

A continuación vamos a estudiar la influencia de la geometría de forma sencilla. Para ello, imaginemos un medio formado por partículas sólidas esféricas perfectas de radio R dispuestos en las esquinas de un cubo de ancho $2R$ (ver figura 9.2(a), cuyas proyecciones en planta, alzado y perfil son iguales, y pueden verse en la figura9.2(b).

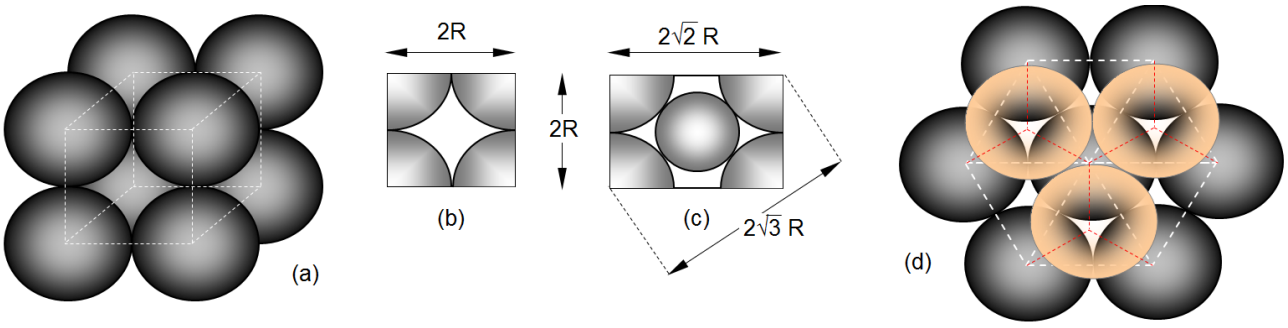


Figura 9.2: Medio poroso formado por esferas perfectas

La porosidad puede calcularse en este caso como el volumen total del cubo menos el de una esfera (un octavo de cada esfera es la parte que queda en el interior del cubo), dividido, todo ello, por el volumen total del cubo:

$$n = \frac{V_h}{V_t} = \frac{(2R)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3}{(2R)^3} = 1 - \frac{\pi}{6} = 0.4796 = 47.96\% \tag{9.4}$$

Este valor de la porosidad es muy elevado, primero porque suponemos esferas perfectas, segundo, porque se han colocado de forma que mantienen una cantidad máxima de huecos, ya que lo lógico es que las esferas se colocaran en los vértices extremos de tetraedros, no de cubos, como muestra la figura 9.2(d), y en tercer lugar porque consideramos el sólido formado por un único tamaño de esferas. Este ejemplo nos vale para tener un valor máximo de porosidad difícilmente superable.

Supongamos ahora la disposición mostrada en la figura 9.2(c), donde se ha añadido una nueva esfera, lo más grande posible, en el hueco intermedio que queda en el centro del cubo.

El radio r de esta esfera, se obtiene a través de la diagonal principal del cubo, y será:

$$R + 2r + R = \sqrt{3}(2R) \qquad \rightarrow \qquad r = \sqrt{3}R - R = \left(\sqrt{3} - 1\right) R \tag{9.5}$$

La porosidad en este caso resulta:

$$n = \frac{(2R)^3 - \frac{4}{3}\pi\left(R^3 + r^3\right)}{(2R)^3} = 1 - \frac{\pi}{6} - \pi\left(\sqrt{3} - \frac{5}{3}\right) = 27.099\% \tag{9.6}$$

Comparando la geometría propuesta en las figuras 9.2(b) y 9.2(c) también puede observarse que en el segundo de los casos, los huecos que quedan tienen una gran cantidad de la superficie del hueco afectada por contornos, por lo que si el flujo que circula por ellos es viscoso, esto tendrá gran influencia. Por tanto, nos damos cuenta que la geometría del poro, dada por su radio hidráulico, también influye.

Así dos medios porosos con igual índice de poros n pero muy diferente geometría de los mismos, tendrán permeabilidades distintas. Este es otro de los motivos por lo que es necesario tomar una muestra del medio lo suficientemente grande para obtener un valor medio de la porosidad.

9.3 Ley de Darcy

El primero que estudio el flujo a través de los medios porosos fue Darcy en 1856 cuando recibió el encargo de estudiar el comportamiento de las fuentes de la ciudad de Dijon en francia.

Para ello, se le ocurrió medir el caudal que atravesaba un medio poroso en función de una pérdida de carga conocida entre sus dos extremos. Para ello utilizó un permeámetro como el de la figura 9.3 donde se puede ver un medio homogéneo encerrado en un tubo en el que se aplica una diferencia de altura piezométrica entre sus extremos de:

$$\Delta h = z_1 + \frac{P_1}{\gamma} - \left(z_2 + \frac{P_2}{\gamma} \right) \tag{9.7}$$

En el caso de Darcy este permeámetro lo dispuso vertical, aunque aquí, y por motivos de claridad, se halla dispuesto inclinado.

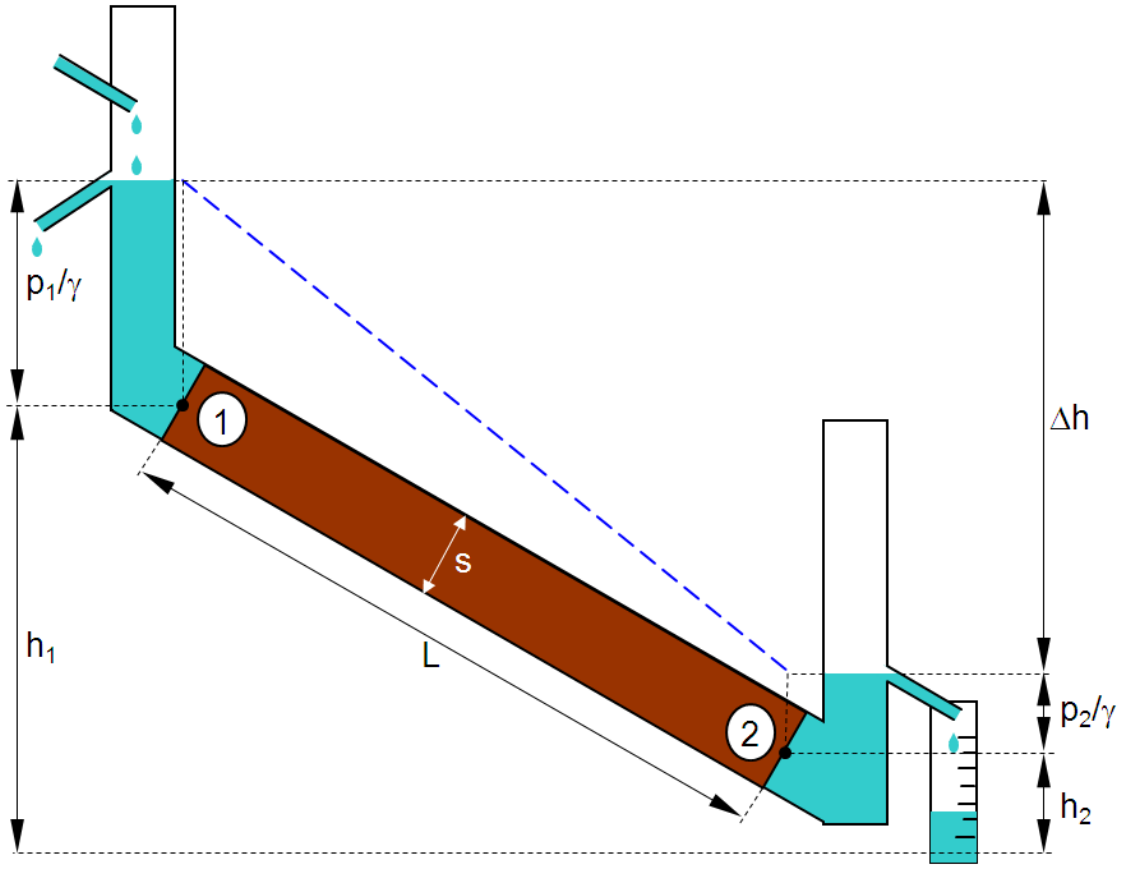


Figura 9.3: Permeámetro para el estudio del flujo de agua

La diferencia de carga entre los extremos 1 y 2 es la que hace que haya un flujo de 1 a 2.

Darcy realizó todos sus experimentos con una velocidad lenta de filtración manteniendo un régimen laminar entre sus extremos (número de Reynolds inferior a 2300). Esto hace que esta ley no sea válida cuando el flujo es turbulento ya que la pérdida de carga dejaría de ser una función lineal de la velocidad.

El sistema se mantiene con esa diferencia de carga constante hasta conseguir su estabilización en el tiempo. Para ello se disponen los rebosaderos inferior y superior del permeámetro, y se aporta siempre más agua de la que rebosa por el superior. En ese momento se supone que el líquido llena totalmente los poros y que las únicas fuerzas actuantes son la gravedad y la viscosidad.

En el extremo inferior se mide la cantidad de líquido que sale por el rebosadero en un intervalo de tiempo conocido, obteniéndose así, el caudal que atraviesa la muestra.

Para la definición del flujo a través de un medio poroso mediante la ecuación de Darcy considere un medio poroso con permeabilidad absoluta K en un campo gravitacional homogéneo donde se hace atravesar un líquido de viscosidad μ y peso específico γ a través del medio aplicando un gradiente de presión Δh entre ambos extremos del mismo tal que el movimiento sea laminar. Entonces el caudal que circula el medio es dado por la ecuación de Darcy:

$$Q = -K \cdot S \frac{\Delta H}{L} \tag{9.8}$$

siendo S la sección atravesada por el flujo y L la longitud recorrida en el medio.

La forma de fluir a través de los poros se caracteriza primordialmente por la viscosidad dinámica μ y el peso específico γ. La viscosidad refleja la resistencia del líquido a fluir debido a las fuerzas tangenciales y a las deformaciones angulares.

A nivel microscópico se producen fuerzas de fricción debidas a las colisiones entre las moléculas. La magnitud de las fuerzas de fricción son las que establecen el valor viscosidad del líquido.

Otra expresión para la viscosidad que se utiliza a menudo, es la viscosidad cinemática ν, definida como:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \tag{9.9}$$

siendo ρ la densidad del líquido.

Si se considera un fluido newtoniano incompresible, la densidad tiene un comportamiento isotrópico (tensor de tensiones con valor negativo de la presión en la diagonal y cero en el resto), el valor de la viscosidad dinámica (μ) es suficiente para la definición del fluido.

La velocidad media V del movimiento del agua en el medio poroso puede por tanto deducirse mediante:

$$V = \frac{Q}{S} = -K \frac{\Delta H}{L} \tag{9.10}$$

Esta velocidad es la media de la totalidad de la sección, cuando en realidad en fluido únicamente circula por los poros. Si consideramos la velocidad de las partículas que circula por los poros, se tiene

la velocidad real aparente V_R:

$$V_R = \frac{V}{n} \tag{9.11}$$

La velocidad es aun mayor porque además debe considerarse que:

- El fluido no se mueve mediante una trayectoria recta directa del extremo 1 al 2, sino que tiene que ir recorriendo un tortuoso camino a través de los huecos.
- La velocidad en un poro es distinta en los bordes que en el centro.
- En el índice de poros están incluidos los poros intersticiales del material, que aunque estén llenos de agua, esta no se mueve, por lo que si se toma como valor de la porosidad un $n' < n$, donde n' es el índice de poros no intersticiales, la velocidad real aparente será mayor.

Este problema de la velocidad real puede ser muy importante cuando el fluido aflora en la superficie de un medio poroso ya que pueden tenerse velocidades capaces de arrastrar las partículas de la superficie. Si estas forman parte de una estructura de contención, como por ejemplo una presa de materiales sueltos, se puede llegar tener una rotura de la misma.

La pendiente de pérdidas I expresa la pérdida de energía por unidad de avance:

$$I = -\frac{\Delta H}{\Delta x} \tag{9.12}$$

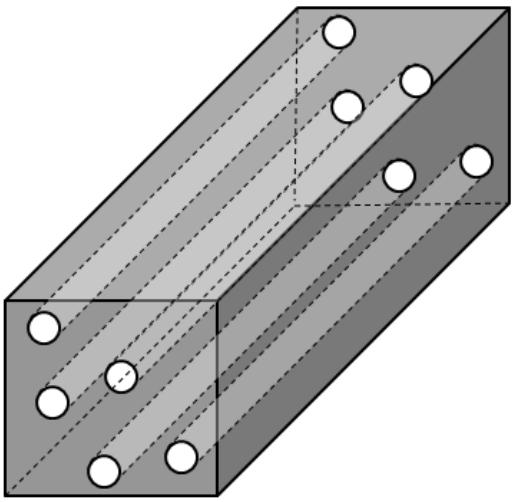


Figura 9.4: Red de poros formada por tubos de igual diámetro

Suponiendo el caso particular de que la red de poros estuviera formada por tubos circulares de diámetro D del tubo equivalente, como muestra la figura 9.4, ya se ha visto, en el caso de las tuberías, que la pérdida de carga puede expresarse como:

$$I = \frac{f}{D}\frac{V^2}{2g} \tag{9.13}$$

siendo ΔH la diferencia de energía entre ambos extremos que, al ser la velocidad muy baja, hace que el término $\frac{V^2}{2g}$ sea despreciable, y por tanto las líneas de energía y piezométrica son casi coincidentes, lo que puede expresarse como:

$$\Delta H \approx \Delta h \tag{9.14}$$

que es estrictamente cierto si la sección a lo largo del permeámetro donde esta dispuesto el material se mantiene constante, al ser ambas rectas paralelas.

Si se utiliza la expresión del número de Reynolds dado por:

$$R_e = \frac{V \cdot D}{\nu} \tag{9.15}$$

y tenemos en cuenta que en régimen laminar $f = \frac{64}{R_e}$, la pendiente de pérdidas puede expresarse por :

$$I = \frac{f}{D}\frac{V^2}{2g} = \frac{\frac{64}{R_e}}{D}\frac{V^2}{2g} = \frac{32}{R_e D}\frac{V^2}{g} = \frac{32}{\frac{V \cdot D}{\nu} D}\frac{V^2}{g} = \frac{32\nu}{D^2}\frac{V}{g} = \frac{32\mu V}{\gamma D^2} \tag{9.16}$$

con lo que la velocidad resulta:

$$V = \frac{\gamma D^2}{32\mu} I \tag{9.17}$$

En este caso la permeabilidad, se obtendría de las ecuaciones (9.10) y (9.17), y sería equivalente a:

$$K = \frac{\gamma D^2}{32\mu} \tag{9.18}$$

Si en vez de suponer un conducto circular, hubiéramos trabajado en un conducto con ranuras, se tendría:

$$V = \frac{\gamma D^2}{12\mu} I \tag{9.19}$$

obteniéndose en esta caso otro valor para la permeabilidad.

Ninguno de estos valores sería el correcto porque la red de huecos a través de los que pasa el agua esta formado por cavidades de todo tipo, pero lo que si es importante es destacar que la permeabilidad es función del:

- Medio que se atraviesa. Más concretamente de la geometría del mismo.
- Fluido que lo atraviesa. Más concretamente de su densidad y viscosidad.

La permeabilidad es un valor que varia mucho de unos medios a otros, y la tabla 9.1 se reflejan algunos de estos valores:

Suelo	K (m/s)
Gravas	$1 \rightarrow 1 \cdot 10^{-2}$
Arenas limpias	$1 \cdot 10^{-2} \rightarrow 1 \cdot 10^{-5}$
Arenas arcillosas	$1 \cdot 10^{-5} \rightarrow 1 \cdot 10^{-8}$

Tabla 9.1: Coeficientes de permeabilidad de distintos terrenos

9.4 Generalización de la Ley de Darcy

Se ha determinado la ley de Darcy para una dirección, cuando la expresamos de forma tridimensional se tiene:

$$\begin{aligned} v_x &= -K \frac{\partial}{\partial x}\left(z + \frac{P}{\gamma}\right) \\ v_y &= -K \frac{\partial}{\partial y}\left(z + \frac{P}{\gamma}\right) \\ v_z &= -K \frac{\partial}{\partial z}\left(z + \frac{P}{\gamma}\right) \end{aligned} \tag{9.20}$$

Estas expresiones suponen un permeabilidad igual en todas las direcciones, lo que muchas veces no es cierto, como ocurre en las obras públicas cuando el material se coloca por compactación en sentido vertical (ej: con apisonadora), lo que hace que la permeabilidad horizontal sea inferior a la vertical. En esta caso, el medio ya no sería isótropo y la ecuación (9.20) resulta:

$$v_i = -K_{ji} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(z + \frac{P}{\gamma}\right) \tag{9.21}$$

donde K_{ij} es un tensor de 2^{o} orden (3x3).

Si se toman las direcciones principales, se consigue que ese tensor solo tenga valores no nulos en su diagonal principal, y si se escalan lo ejes mediante una transformación se puede conseguir que el valor de la permeabilidad coincida, pero hay que tener en cuenta estas transformaciones para trabajar con el problema, ya que se tendrá distinta escala en cada uno de los ejes principales.

9.5 Permeabilidades equivalentes

9.5.1 Flujo en terrenos dispuestos en paralelo

Imaginemos un medio poroso formado por estratos paralelos dispuestos en la dirección del flujo. Si suponemos que el flujo se mantiene horizontal, la permeabilidad equivalente a un medio homogéneo puede estudiarse en función del espesor de cada estrato. Para ello imaginemos el permeámetro mostrado en la figura 9.5

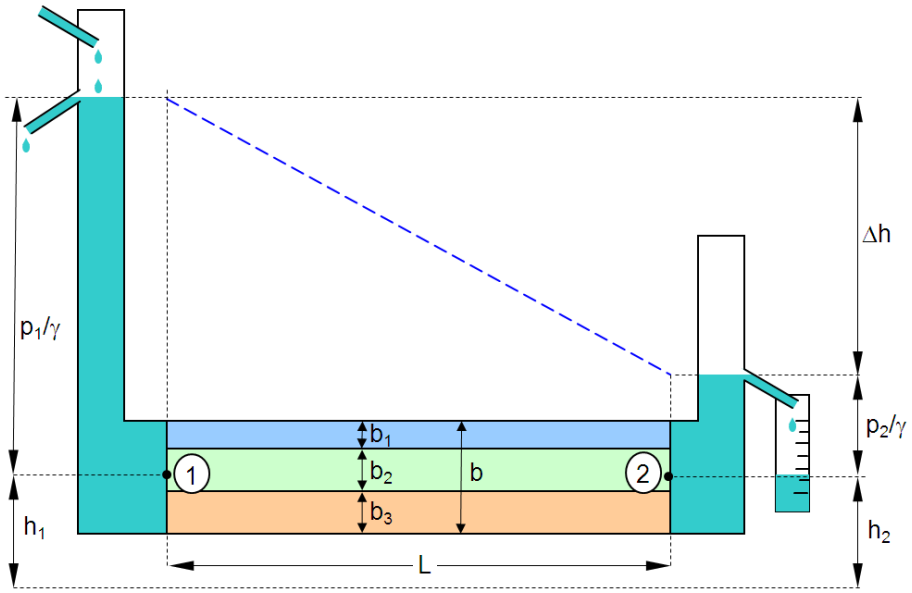


Figura 9.5: Permeabilidad equivalente en capas paralelas al flujo

En este caso el flujo total Q que atraviesa el permeámetro es la suma de los flujos que atraviesa cada una de las capas $Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i$, siendo i el número de capa considerada y n el número de capas.

Todas las capas tienen una misma diferencia de potencial entra ellas dada por $\Delta h/L$, y distinta permeabilidad K_i y espesor b_i, siendo la suma de todos los espesores el espesor total b del permeámetro.

El caudal total puede expresarse en función del caudal circulante por cada una de las capas y de la permeabilidad equivalente del flujo en paralelo K^P como:

$$Q = bK^P \frac{\Delta h}{L} = \sum_{i=1}^{n} b_i K_i \frac{\Delta h}{L} = b \left(\frac{1}{b} \sum_{i=1}^{n} b_i K_i \right) \frac{\Delta h}{L} \tag{9.22}$$

Por lo que resulta:

$$K^P = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^{n} b_i K_i \tag{9.23}$$

9.5.2 Flujo en terrenos dispuestos en serie

En esta caso el esquema queda representado en la figura 9.6.

El espesor b es el mismo en todas las capas, y lo que cambia es la longitud de cada una de ellas L_i siendo la longitud total L la suma de todas.

Cada uno de los terrenos tendrá una pendiente de pérdidas $\Delta h_i/L_i$ distinta, siendo la suma la pendiente de pérdidas equivalente $\Delta h/L = \sum_{i=1}^{n} (\Delta h_i/L_i)$.

El caudal que circula por el permeámetro es, por continuidad, el mismo que circula por cada uno

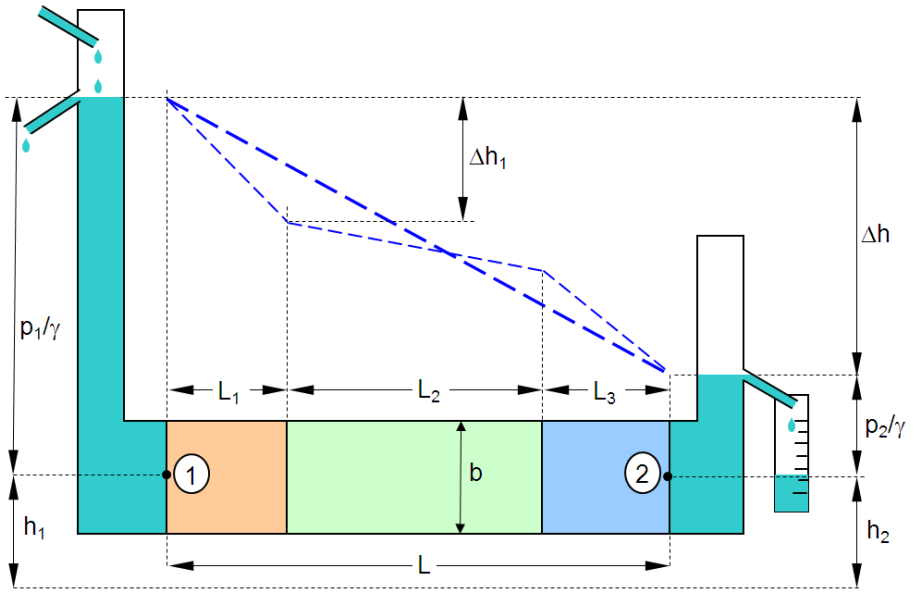


Figura 9.6: Permeabilidad equivalente en capas perpendiculares al flujo

de los terrenos, por lo que:

$$Q = bK_i\frac{\Delta h_i}{L_i} = bK^S\frac{\Delta h}{L} \qquad \rightarrow \qquad \Delta h_i = \frac{Q}{b}\frac{L_i}{K_i} \tag{9.24}$$

siendo K^S la permeabilidad equivalente en serie buscada.

Como:

$$\Delta h = \sum_{i=1}^{n}\Delta h_i = \frac{Q}{b}\sum_{i=1}^{n}\frac{L_i}{K_i} \qquad \rightarrow \qquad Q = b\frac{\Delta h}{\sum_{i=1}^{n}\frac{L_i}{K_i}} = b\left(\frac{L}{\sum_{i=1}^{n}\frac{L_i}{K_i}}\right)\frac{\Delta h}{L} \tag{9.25}$$

con lo que la permeabilidad equivalente buscada es:

$$K^S = \frac{L}{\sum_{i=1}^{n}\frac{L_i}{K_i}} \tag{9.26}$$

9.5.3 Analogía eléctrica

Este fenómeno, igual que otros muchos en la hidráulica, entre los que destacaremos la resolución de la Ecuación de Laplace, que se verá más adelante para el estudio de la red de flujo en el medio poroso, puede estudiarse mediante una analogía eléctrica de la ley de Ohm $V = IR$ donde V es la diferencia de potencial, I la intensidad del campo eléctrico y R la resistencia.

Si hacemos las equivalencias hidráulicas de estas magnitudes como:

$$Q = I\,; \qquad \Delta h = V \qquad \frac{L}{KA} = R \tag{9.27}$$

y sabiendo que la resistencia equivalente a un grupo de resistencias dispuestas en paralelo es:

$$\frac{1}{R^P} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}R_i} \tag{9.28}$$

Sustituyendo por las equivalencias dadas se llega a la misma expresión de K^P que la deducida.

Cuando tratamos con resistencias en serie se tiene que la resistencia equivalente es:

$$R^S = \sum_{i=1}^{n} R_i \tag{9.29}$$

y también se llega a la K^S anteriormente deducida.

9.6 Ecuación de continuidad

Se considera el elemento paralepipédico infinitesimal de la figura 9.7, inmerso en un fluido en movimiento de velocidades $\mathbf{v}$ (v_x, v_y, v_z) según las componentes cartesianas (x, y, z) respectivamente, y se estudia la variación de masa que se produce entre las caras $-\frac{\Delta x}{2}$ y $\frac{\Delta x}{2}$. Al despreciar los términos de segundo orden, se obtiene:

- Masa que entra: $\left[\rho v_x - \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right]\Delta y \Delta z$
- Masa que sale: $\left[\rho v_x + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right]\Delta y \Delta z$

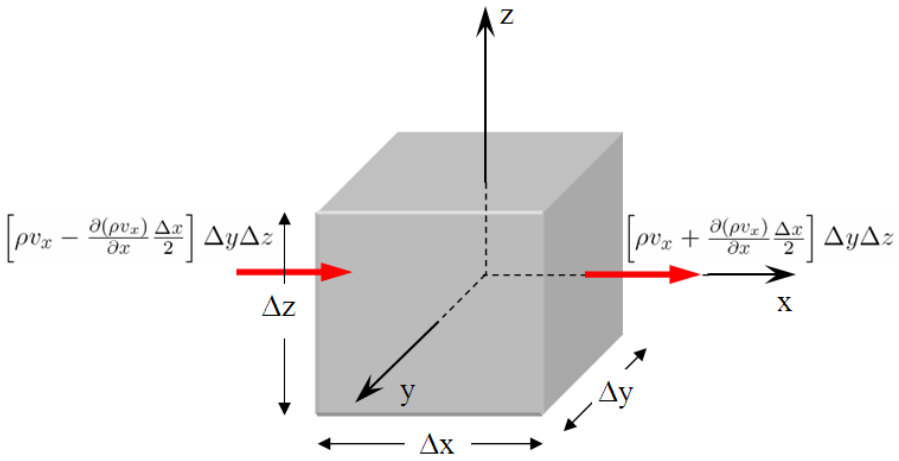


Figura 9.7: Flujo a través de un cubo infinitesimal

Por lo tanto la masa que entra menos la que sale en el elemento en un diferencial de tiempo se puede expresar como:

$$-\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}\Delta t \Delta x \Delta y \Delta z \tag{9.30}$$

Aplicando esta ecuación al equilibrio, entre las tres parejas de caras opuestas del paralelepípedo, se deduce:

$$-\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right]\Delta x \Delta y \Delta z \tag{9.31}$$

Si se considera la variación de masa a lo largo del diferencial de tiempo t como:

$$[\rho(t) - \rho(t + \Delta t)]\,\Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta t \Delta x \Delta y \Delta z \tag{9.32}$$

Si se tiene en cuenta el principio de la conservación de la masa, al igualar (9.31) y (9.32) se obtiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta t \Delta x \Delta y \Delta z = -\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right] \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \tag{9.33}$$

Con lo que resulta la ecuación:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right] = 0 \tag{9.34}$$

Se puede deducir la siguiente forma alternativa a la expresión (9.34) al desarrollar los términos de velocidad:

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z}\right) + \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{9.35}$$

La variación de la masa ρ puede expresarse como una función de la variación de la presión a través del módulo de elasticidad volumétrico ε

$$\Delta P = -\varepsilon \frac{dV}{V} = \varepsilon \frac{d\rho}{\rho} \qquad \rightarrow \qquad \varepsilon = \rho \frac{dP}{d\rho} \tag{9.36}$$

La ecuación (9.35) puede escribirse en términos de variación de la presión como:

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial P}{\partial t} + v_x \frac{\partial P}{\partial x} + v_y \frac{\partial P}{\partial y} + v_z \frac{\partial P}{\partial z}\right) + \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{9.37}$$

Esta variación de presión produce dos fenómenos:

- El líquido se comprime disminuyendo el volumen en la cantidad:

$$\beta \frac{\partial P}{\partial t} dt V_h = \beta \frac{\partial P}{\partial t} dt n \Delta x \Delta y \Delta z \tag{9.38}$$

  siendo β el módulo de elasticidad volumétrico del agua, y n la porosidad.

- La estructura del medio poroso se dilata aumentando el volumen total en la cantidad de:

$$\alpha \frac{\partial P}{\partial t} dt V_t = \alpha \frac{\partial P}{\partial t} dt \Delta x \Delta y \Delta z \tag{9.39}$$

  siendo α el módulo de elasticidad volumétrico del conjunto.

Esta variación de la masa debe coincidir con la expresada en la ecuación (9.33). Por tanto:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right] = -\rho\,(n\beta + \alpha)\,\frac{\partial P}{\partial t} \tag{9.40}$$

Al coeficiente $S_s = -\rho g\,(n\beta + \alpha)$ se le llama almacenamiento específico y tiene dimensiones L^{-1}.

Si se adopta la hipótesis de que el agua puede considerarse un fluido incompresible ($\rho = cte$), la ecuación (9.37) se convierte en:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{9.41}$$

que es la denominada **ecuación de continuidad** ($div\ \mathbf{V} = 0$) de un fluido incompresible.

Esta ecuación expresa un campo solenoidal (por tanto con divergencia nula), donde los cambios en el flujo que se producen a través de una de las caras de la partícula fundamental mostrada en la figura 9.7 deben estar en equilibrio con lo que ocurre en el resto de la partícula.

9.7 La función de corriente

La función de corriente $\boldsymbol{\psi}$ esta basada en el principio de continuidad y representa las trayectorias que sigue un flujo fluido.

Cuando se tienen dos líneas de corriente adyacentes $\boldsymbol{\psi}$ y $\psi + d\boldsymbol{\psi}$ no existe flujo perpendicular a esas líneas, y $d\boldsymbol{\psi}$ representará el flujo entre ambas.

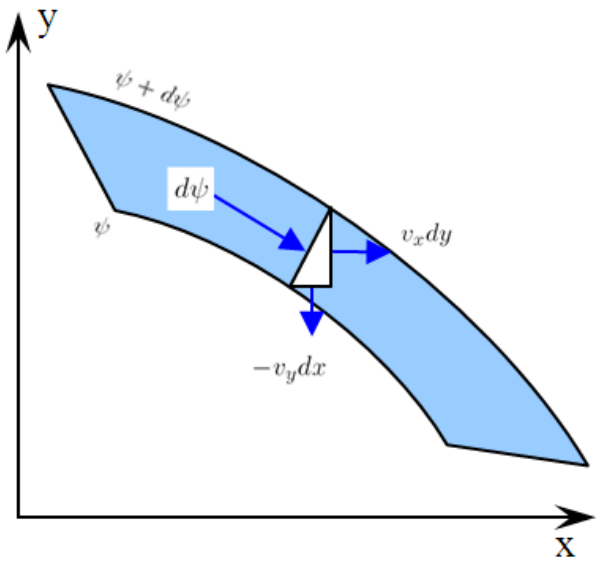


Figura 9.8: Equilibrio de caudales en un tubo de flujo

Si consideramos el elemento triangular entre ambas líneas de corriente mostrado en la figura 9.8 y aplicamos el equilibrio entre la entrada y las salidas, se obtiene:

$$d\boldsymbol{\psi} = -v_y dx + v_x dy \tag{9.42}$$

La derivada total de la función de corriente, la podemos expresar mediante:

$$d\boldsymbol{\psi} = \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial x} dx + \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial y} dy \tag{9.43}$$

Igualando las ecuaciones (9.42) y (9.43), se obtiene:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{9.44}$$

Esto quiere decir que las velocidades pueden conocerse a través de la función de corriente ψ expresada en función de las coordenadas x e y.

De manera inversa puede conocerse la función ψ integrando las velocidades si estas son conocidas.

Lo mas importante a tener en cuenta es que la función ψ ha sido deducida teniendo en cuenta el principio de continuidad que debe satisfacerse. Por tanto:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = 0 \tag{9.45}$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} \tag{9.46}$$

por lo que las derivadas cruzadas son iguales.

9.8 Movimiento irrotacional

La rotación de una partícula de fluido a lo largo de los eje x, y, z se determina de acuerdo con la fórmula:

$$\operatorname{rot} \overline{\omega} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \tag{9.47}$$

con lo que resulta:

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) \qquad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \qquad \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \tag{9.48}$$

Un campo de velocidades se denomina irrotacional si la rotación de cada partícula del fluido es nula, es decir $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$. Conviene tener presente que la ausencia de rotaciones no implica que el fluido no sea viscoso, excepto en la región de $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$.

9.9 Potencial de velocidades

Se denomina potencial de velocidades $\boldsymbol{\Phi}$ a una función que satisface las igualdades:

$$v_x = \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial x}; \qquad v_y = \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial y}; \qquad v_z = \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial z} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{V} = \nabla \boldsymbol{\Phi} \tag{9.49}$$

Si se introducen estos valores de la velocidad en la ecuación (9.48) resulta $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$. Por consiguiente la existencia de una función potencial significa que el campo de velocidades es irrotacional, y se puede demostrar la proposición inversa.

Definamos un potencial de velocidades $\mathbf{\Phi}$ dado por:

$$d\mathbf{\Phi} = -v_x dx - v_y dy \tag{9.50}$$

que existirá si el campo es irrotacional. En este caso, en que es un campo plano, basta con que $\omega_z = 0$, por tanto:

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \tag{9.51}$$

La derivada total del potencial es:

$$d\mathbf{\Phi} = \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial y} dy \tag{9.52}$$

Igualando las ecuaciones (9.50) y (9.52), se obtiene:

$$v_x = -\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial x} \qquad\qquad v_y = -\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial y} \tag{9.53}$$

El signo menos indica que el potencial va disminuyendo en la dirección de la velocidad.

Metiendo la condición de irrotacionalidad en el campo plano dada por el término ω_z de la ecuación (9.48), y sustituyendo los valores de la velocidad en el campo potencial obtenidos en (9.53) se obtiene:

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial \left(-\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial x}\right)}{\partial y} - \frac{\partial \left(-\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 \mathbf{\Phi}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \mathbf{\Phi}}{\partial x \partial y} = 0 \tag{9.54}$$

con lo que se ha demostrado que las derivadas cruzadas son iguales.

La demostración de la existencia del campo potencial se ha realizado al introducir el campo irrotacional.

Cuando un fluido no es irrotacional, deben existir fuerzas de momento de par que hagan que no lo sea. Esas fuerzas se originan por las fuerzas cortantes debidas a la viscosidad. En fluidos ideales, donde no hay viscosidad, estas fuerzas no pueden existir y por tanto el fluido es irrotacional.

La expresión de esta ecuación en polares es:

$$v_r = -\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial r}\,; \qquad v_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \theta} \tag{9.55}$$

9.10 Ecuación de Laplace

El fluido que cumple la función de Laplace es un fluido ideal, ya que

- Debe ser incompresible. Esto es necesario para que exista una función de corriente.
- Debe ser irrotacional. Esto es necesario para que exista una función potencial.

Si obligamos a que el potencial de velocidades (9.53) cumpla la ecuación de continuidad (9.41), se obtiene la **Ecuación de Laplace:**

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)}{\partial y}=\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}=0 \tag{9.56}$$

9.11 Red de flujo

Al conjunto de la red formada por las líneas de corriente y equipotenciales que cumplen la Ecuación de Laplace se le denomina **red de flujo**.

A continuación vamos a demostrar que ambas funciones son perpendiculares en todos sus puntos.

Ya habíamos obtenido en las ecuaciones (9.42) y (9.50):

$$d\psi=-v_y dx+v_x dy \qquad\qquad d\Phi=-v_x dx-v_y dy \tag{9.57}$$

Una linea de corriente cumple que $d\psi=0$ lo que implica que:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{v_y}{v_x} \tag{9.58}$$

Haciendo lo mismo con la línea equipotencial ($d\Phi=0$), se obtiene:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{v_x}{v_y} \tag{9.59}$$

Esto implica que ambas líneas son ortogonales o perpendiculares en todos sus puntos.

9.12 Condiciones de contorno

La figura 9.9 muestra varias condiciones de contorno distintas en un medio poroso. Se supone la estructura apoyada sobre terreno impermeable.

En los tramos AB y DE la carga es un empuje hidrostático perpendicular a la pared y equivalente en cada punto al peso de la columna de agua que tiene por encima mas la presión atmosférica. En cambio el potencial se puede interpretar como la energía de la partícula respecto del plano de referencia elegido. Así, cualquier partícula en la zona de agua a la izquierda de la presa tendrá un potencial dado por la ecuación de Bernoulli:

$$H=z+\frac{P}{\gamma} \tag{9.60}$$

valor que tienen todos los puntos del paramento AB de la presa. Lo mismo ocurre con el paramento DE, siendo en este caso un potencial menor.

La diferencia de potencial entre ambos es lo que hace que las partículas circulen a lo largo del macizo de la presa.

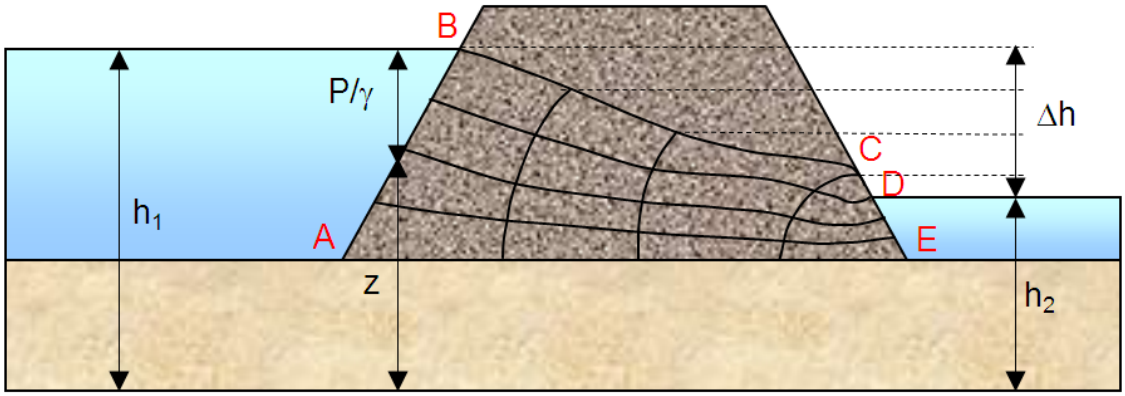


Figura 9.9: Condiciones de contorno

Si dividimos esta diferencia de potencial en partes iguales, y tenemos definida la línea de flujo con presión atmosférica se puede determinar la variación de potencial a lo largo de la misma con el corte de las líneas equipotenciales anteriores.

En CD la presión es la atmosférica, y el agua que aflora por este tramo desciende en forma de escurrimiento. Eso puede ser muy peligroso ya que puede extraer piezas de la estructura.

En AE como es impermeable, la línea de corriente sigue esta trayectoria, y por tanto, la velocidad normal a esta línea es nula:

$$v_n = -K\frac{\partial h}{\partial n} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial h}{\partial n} = 0 \tag{9.61}$$

El contorno BC es de superficie libre, es decir, presión igual a la atmosférica, por lo que se cumple la misma condición que en AE, no hay velocidad perpendicular al mismo.

La figura 9.10 muestra una red de flujo en un medio poroso, situado por encima de un terreno impermeable cuando el flujo se realiza por debajo de una estructura impermeable

Líneas de flujo constante son, el borde de la estructura y la separación de la capa impermeable con el medio poroso.

Líneas de potencial constante son AB y CD.

9.13 Resolución de la Ecuación de Laplace

Una vez establecidas las condiciones de contorno se trata de resolver la ecuación diferencial, para ello se dibujan las curvas de flujo y potencial a sentimiento, empezando por pocas líneas. La experiencia es fundamental y existen numerosas recomendaciones que al ser tenidas en cuenta simplifican este proceso.

Una vez dibujada la red de flujo, se comprueba que se cumpla la ecuación de Laplace entre los cuadros de la red, ajustándose el dibujo en caso contrario.

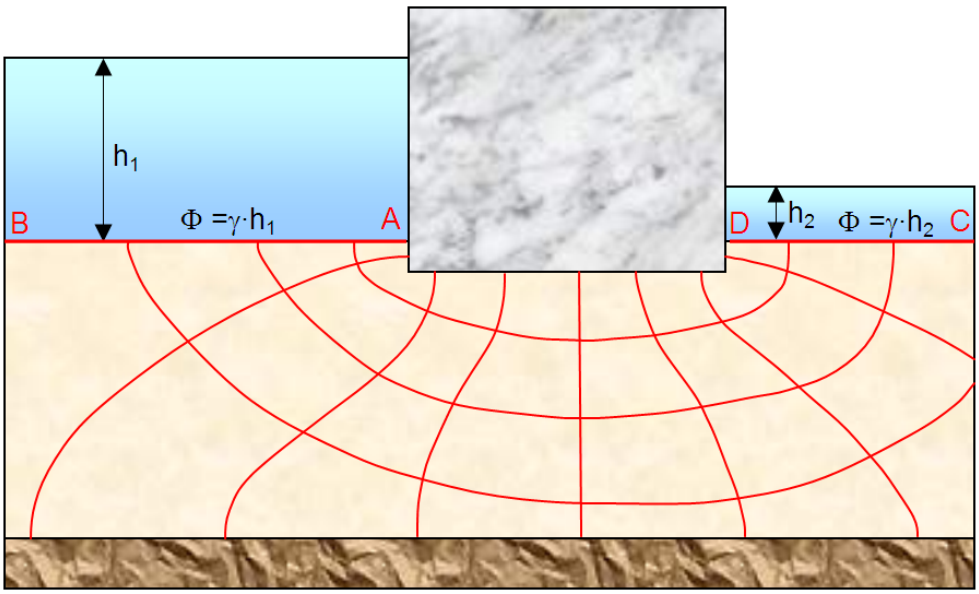


Figura 9.10: Red de flujo bajo una estructura impermeable

9.14 Hipótesis de Dupuit

La variación del flujo se define mediante:

$$d\psi = \frac{d\phi}{ds} \tag{9.62}$$

Cuando estamos en un acuífero con superficie libre cuasi horizontal, podemos utilizar la hipótesis de Dupuit para simplificar la resolución de la ecuación de Laplace. Esta consiste en:

$$d\psi = \frac{dh}{dx} \tag{9.63}$$

Lo que implica que estamos suponiendo que las líneas equipotenciales son perpendiculares al fondo impermeable, y que por lo tanto el flujo es perpendicular a estas. Si el fondo impermeable es horizontal el flujo, las equipotenciales son verticales, y el flujo es horizontal. Esta simplificación puede verse en la figura 9.11

Esta simplificación no será válida cuando la pendientes de la superficie libre es elevada, por ejemplo en niveles freáticos en laderas de montaña, pero no induce a mucho error si en laderas de montaña el estrato impermeable es relativamente paralelo a la cota piezométrica

Ejemplo

Caudal extraído de una zanja

Calcular el caudal recogido por metro de longitud por una zanja abierta en una capa freática con coeficiente de permeabilidad $K = 10^{-5}\ m/s$ sabiendo que a 10 y 50 m de su paramento las cotas piezométricas sobre el estrato impermeable que coincide con el fondo de la zanja valen 4.0 y 7.0 m respectivamente. Determinar, además, la altura del nivel freático en el paramento de la zanja.

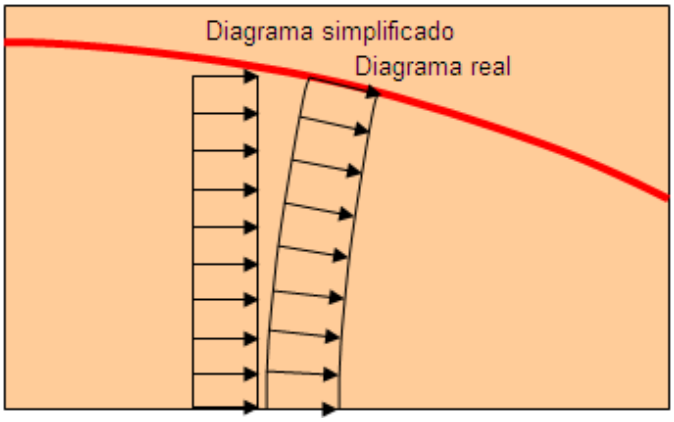


Figura 9.11: Hipótesis de Dupuit

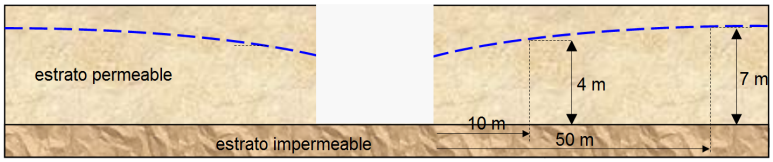


Figura 9.12: Zanja de extracción de agua en un acuífero

Asumiendo la hipótesis de Dupuit, el caudal por metro lineal de zanja es:

$$q = K \cdot h \frac{dh}{dx} = \text{cte} \tag{9.64}$$

Reescribiendo la ecuación anterior para su integración:

$$q \cdot dx = K \cdot h \cdot dh \quad \rightarrow \quad q \int_{l_a}^{l_b} dx = K \int_{h_a}^{h_b} h \cdot dh \quad \rightarrow \quad q \cdot x|_{l_a}^{l_b} = \frac{1}{2} K \cdot h^2 \Big|_{h_a}^{h_b} \tag{9.65}$$

$$q\,(50 - 10) = \frac{1}{2} K \left(7^2 - 4^2\right) \qquad \rightarrow \qquad q = \frac{33 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 40} = 4.125 \cdot 10^{-6} \ \frac{m^3}{s \cdot m} \tag{9.66}$$

Por simetría de la zanja, el caudal total por metro de longitud de zanja es:

$$q_{total} = 2q = 8.25 \cdot 10^{-6} \ \frac{m^3}{s \cdot m} = 29.70 \ \frac{l}{h \cdot m} \tag{9.67}$$

El nivel freático puede determinarse al resolver la integral sin límites y aplicar las condiciones de contorno.

$$q \int dx = K \int h \cdot dh \quad \rightarrow \quad q \cdot x = K \frac{h^2}{2} + C_1 \quad \rightarrow \quad C_1 = q \cdot x - K \frac{h^2}{2} \tag{9.68}$$

Particularizando para el punto $x = 10\ m$, $h = 4\ m$, se tiene:

$$C_1 = 10q - K \frac{4^2}{2} = 10q - 8K \tag{9.69}$$

Sustituyendo en (9.68):

$$q \cdot x = K\frac{h^2}{2} + 10q - 8K \tag{9.70}$$

Al aplicar $x = 0\ m$ se obtiene la h en zanja:

$$K\frac{h^2}{2} + 10q - 8K = 0 \quad \rightarrow \quad h = \sqrt{16 - 20\frac{q}{K}} = \sqrt{16 - 20 \cdot 0.4125} = 2.784 \text{ m} \tag{9.71}$$

9.15 Acuífero confinado

Un acuífero confinado es aquel en que el estrato permeable permanece encerrado entre dos estratos impermeables. Si se practica un pozo que atraviesa el estrato superior estamos creando un pozo artesiano en el que el agua puede ascender por encima de la cota de separación entre el estrato permeable y el impermeable debido a la presión del agua almacenada en el medio poroso (figura 9.13).

Si el espesor (e) del acuífero permanece constante, el valor de $K \cdot e$ es también una constante.

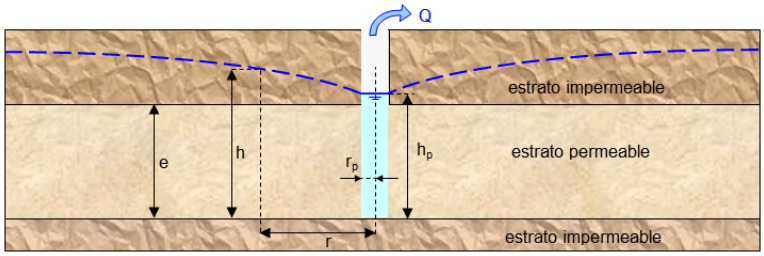


Figura 9.13: Acuífero confinado

En este caso, y aplicando al hipótesis de Dupuit, la red de flujo la podemos expresar como un potencial de la altura piezométrica mediante:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \tag{9.72}$$

que en coordenadas polares resulta:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial h}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} = 0 \tag{9.73}$$

En el caso particular de un pozo hay simetría circular, por lo que el segundo término es nulo, quedando:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial h}{\partial r}\right) = 0 \tag{9.74}$$

por lo que el siguiente término es constante:

$$r\frac{dh}{dr} = C \qquad \rightarrow \qquad \frac{dh}{dr} = \frac{C}{r} \tag{9.75}$$

La constante C puede obtenerse al considerar el caudal extraído del pozo cuando se ha conseguido el régimen permanente, momento en que el caudal que se filtra a través de cualquier sección cilíndrica a una distancia r del centro del pozo coincide con el extraído.

$$Q = S \cdot v = 2\pi reK\frac{dh}{dr} \qquad \rightarrow \qquad \frac{dh}{dr} = \frac{Q}{2\pi reK} = \frac{C}{r} \qquad \rightarrow \qquad C = \frac{Q}{2\pi eK} \tag{9.76}$$

siendo:

S	Sección del cilindro a la distancia r atravesado por el flujo	(m^2)
e	Altura constante del acuífero confinado	(m)

Integrando la ecuación (9.75) se tiene:

$$dh = \frac{C}{r}dr \qquad \rightarrow \qquad h = \frac{Q}{2\pi eK}ln(r) + C' \tag{9.77}$$

Para obtener la constante de integración se establecen las condiciones en el pozo, donde para $(r = r_p)$ la altura piezométrica en régimen permanente es conocida $(h = h_p)$.

$$C' = h_p - \frac{Q}{2\pi eK}ln(r_p) \qquad \rightarrow \qquad h - h_p = \frac{Q}{2\pi eK}ln\left(\frac{r}{r_p}\right) \tag{9.78}$$

h_p	Altura piezométrica en el pozo en régimen permanente	(m)
r_p	Radio del pozo	(m)

Metiendo este valor en (9.77) se tiene:

$$h - h_p = \frac{Q}{2\pi eK}ln\left(\frac{r}{r_p}\right) \tag{9.79}$$

Esta ecuación permite dibujar la forma de la superficie libre conocida la permeabilidad del acuífero, la altura del estrato impermeable, y el caudal extraído para una determinada altura piezométrica medida de un pozo de radio conocido cuando el régimen es permanente.

Este caso se puede aplicar únicamente cuando la altura piezométrica medida en el pozo (h_p) esta por encima de la altura de confinamiento del acuífero, o este dejará de ser confinado.

Ejemplo

Cálculo de la permeabilidad en un acuífero confinado.

Las cotas piezométricas medidas en dos puntos separados 20 y 200 m del centro de un pozo artesiano son respectivamente 15.0 y 23.0 m contados desde la cota superior del estrato permeable.

Sabiendo que el radio del pozo es de 1.0 m, el espesor del estrato 20.0 m y el caudal extraído 3.5 l/s. Se pide calcular el coeficiente de permeabilidad de la capa.

Partiendo de la ecuación (9.79) y aplicando las condiciones de contorno facilitadas en el enunciado, se tiene:

$$r = 20 \qquad h = 20 + 15 \qquad 20 + 15 - h_p = \frac{3.5 \cdot 10^{-3}}{2\pi 20 K} \ln\left(\frac{20}{1}\right) \tag{9.80}$$

$$r = 200 \qquad h = 20 + 23 \qquad 20 + 23 - h_p = \frac{3.5 \cdot 10^{-3}}{2\pi 20 K} \ln\left(\frac{200}{1}\right) \tag{9.81}$$

Restando la ecuación (9.81) de la ecuación (9.80), se llega a:

$$23 - 15 = \frac{0.027852 \cdot 10^{-3}}{K} \ln\left(\frac{200}{20}\right) \quad \rightarrow \quad K = \frac{27.852 \cdot 10^{-6} \ln(10)}{8} = 8.016 \cdot 10^{-6} \text{ m/s} \tag{9.82}$$

La altura piezométrica alcanzada en el pozo será:

$$h_p = 35 - \frac{3.5 \cdot 10^{-3}}{2\pi 20 \cdot 8.016 \cdot 10^{-6}} \ln(20) = 24.59 \,\text{m} \tag{9.83}$$

9.16 Acuífero con superficie libre

La diferencia con el acuífero confinado es que la sección atravesada por el flujo varia en función de la distancia al pozo, siendo h la altura de la misma. En este caso únicamente la permeabilidad (K) es una constante. La figura 9.14 muestra una sección radial de este tipo de acuíferos

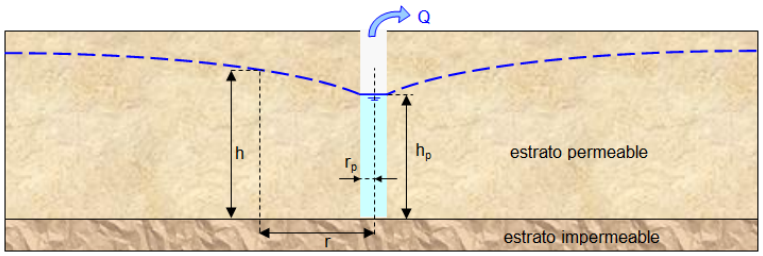


Figura 9.14: Acuífero libre

Por tanto, y aplicando al hipótesis de Dupuit, la red de flujo la podemos expresar como un potencial de la altura piezométrica al cuadrado mediante:

$$\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h^2}{\partial y^2} = 0 \tag{9.84}$$

que en coordenadas polares resulta:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial h^2}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 h^2}{\partial \theta^2}=0 \tag{9.85}$$

La simetría circular en este caso implica:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial h^2}{\partial r}\right)=0 \tag{9.86}$$

por lo que el siguiente término es constante:

$$r\frac{dh^2}{dr}=C \tag{9.87}$$

Si se tiene en cuenta que $\frac{dh^2}{dh}=2h$, podemos escribir que $dh^2=2hdh$. Sustituyendo en (9.87) se llega a:

$$r\frac{2hdh}{dr}=C \quad \rightarrow \quad \frac{dh}{dr}=\frac{C}{2hr} \tag{9.88}$$

La constante C puede obtenerse cuando se considera el caudal extraído del pozo cuando se ha conseguido el régimen permanente, momento en que el caudal que se filtra por las paredes del pozo coincide con el extraído.

$$Q=2\pi rhK\frac{dh}{dr} \quad \rightarrow \quad \frac{dh}{dr}=\frac{Q}{2\pi rhK} \tag{9.89}$$

Igualando las ecuaciones (9.88) y (9.89) se determina el valor de la constante C.

$$C=\frac{Q}{\pi K} \tag{9.90}$$

Integrando la ecuación (9.88) y sustituyendo el valor de C, se tiene:

$$2hdh=\frac{Q}{\pi Kr}dr \quad \rightarrow \quad h^2=\frac{Q}{\pi K}ln(r)+C' \tag{9.91}$$

Para obtener la constante de integración se establecen las condiciones en el radio del pozo (r_p) donde la altura es conocida (h_p).

$$C'=h_p^2-\frac{Q}{\pi K}ln(r_p) \quad \rightarrow \quad h^2-h_p^2=\frac{Q}{\pi K}ln\left(\frac{r}{r_p}\right) \tag{9.92}$$

resultando la ecuación:

$$h^2-h_p^2=\frac{Q}{\pi K}ln\left(\frac{r}{r_p}\right) \tag{9.93}$$

Ejemplo

Cálculo de la permeabilidad en un acuífero libre.

Determinar la permeabilidad en el entorno de un pozo de 1 m de radio sabiendo que al bombear de forma permanente un caudal de 100 l/s la cota de agua en el pozo es la 102 m, estando el nivel freático a una distancia de 20 m del centro del pozo a la cota 108.2 m. El fondo del pozo donde se supone se alcanza el estrato impermeable esta situado a la cota 92.5 m.

Partiendo de la ecuación (9.93) y aplicando las condiciones de contorno facilitadas en el enunciado, se tiene:

$$r = 1 \qquad h = h_p = 102.0 - 92.5 = 9.50 \qquad 9.50^2 - 9.50^2 = \frac{100 \cdot 10^{-3}}{\pi K} \ln\left(\frac{1}{1}\right) \tag{9.94}$$

$$r = 20 \qquad h = 108.2 - 92.5 = 15.70 \qquad 15.70^2 - 9.50^2 = \frac{100 \cdot 10^{-3}}{\pi K} \ln\left(\frac{20}{1}\right) \tag{9.95}$$

Restando la ecuación (9.95) de la ecuación (9.94), se llega a:

$$K = \frac{100 \cdot 10^{-3}}{\pi \left(15.7^2 - 9.5^2\right)} \ln(20) = 6.10 \cdot 10^{-4} \text{ m/s} \tag{9.96}$$

Golpe de Ariete

X

10.1 Introducción

Supongamos una serie de partículas de igual tamaño (V) circulando en una tubería de sección S incompresible a velocidad v. Se quiere estudiar lo que ocurre cuando se detiene el movimiento bruscamente en un punto de la tubería, por ejemplo, por el cierre de una válvula.

En ese caso la partícula inmediatamente próxima al cierre, pasa a tener velocidad nula, transformando su energía cinética en energía de presión, produciendo una compresión en el fluido que da lugar a una reducción de volumen

La relación que existe entre el incremento de presión aplicada y la disminución de volumen viene dada por:

$$\Delta P = \varepsilon \frac{\Delta V}{V} \tag{10.1}$$

siendo:

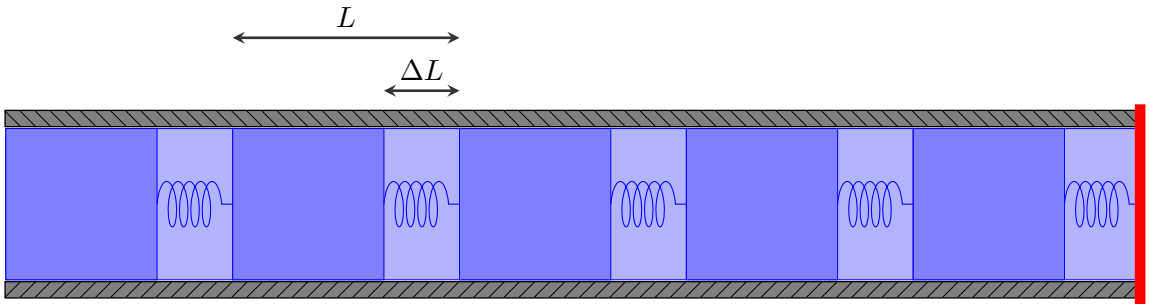
ε	Módulo de compresibilidad del fluido	(N/m^2)
ΔV	Disminución de volumen debido a la presión aplicada	(m^3)
V	Volumen inicial de la partícula	(m^3)
$\frac{\Delta V}{V}$	Pérdida unitaria de volumen	$(-)$

Si suponemos una tubería infinitamente rígida de sección unitaria ($S = 1$), y representamos cada una de las partículas circulantes por la tubería de volumen (V) divididas en dos partes, una completamente rígida V_s e indeformable y la otra, ΔV, correspondiente al volumen que se puede comprimir cuando aplicamos la presión P (Figura **??**(a)). Esquemáticamente podría representarse como un solido rígido mas un muelle que se va a comprimir hasta una longitud nula cuando se alcanza la presión P (Figura **??**(b))

Como se ha considerado tubería incompresible $S = cte$, el volumen y el cambio de volumen pueden expresarse como $V = S \cdot L$ y $\Delta V = S \cdot \Delta L$ respectivamente.

En esta situación una partícula sustituye a la inmediatamente anterior tras un tiempo dado por:

$$t = \frac{L}{v} \tag{10.2}$$



Si se observa el comportamiento aguas arriba de la válvula cuando ésta se cierra bruscamente, se ve que la primera partícula se encuentra una pared por lo que empezará a comprimirse mientras disminuye su velocidad hasta detenerse, momento en que habrá alcanzado la presión P disminuyendo su longitud inicial L en ΔL. Este proceso ocurre en el tiempo necesario para que la partícula recorra el espacio correspondiente a ΔL circulando a la velocidad v por la tubería:

$$\Delta t = \frac{\Delta L}{v} \tag{10.3}$$

Pasado este tiempo, la segunda partícula comienza a chocar con la parte más alejada de la válvula de la primera partícula, que se comporta como sólido rígido, y que está a una distancia de la válvula de $L - \Delta L$. Esta nueva sección se comporta como una nueva pared para la segunda partícula, y así sucesivamente hasta que se detienen todas las partículas de la tubería. Por tanto, se puede determinar una velocidad de avance a de la onda que avanza hacia aguas arriba de la tubería (celeridad) deteniendo el movimiento dada por:

$$a = \frac{L - \Delta L}{\Delta t} = \frac{L - \Delta L}{\Delta L} v \tag{10.4}$$

Como el agua es casi incompresible $\Delta L << L$ por lo que puede considerarse sin mucho error que:

$$a = \frac{L - \Delta L}{\Delta L} v \simeq \frac{L}{\Delta L} v \tag{10.5}$$

Por tanto la ecuación (10.1) puede escribirse como:

$$\Delta P = \varepsilon \frac{\Delta L}{L} = m \cdot acel \tag{10.6}$$

siendo $m = \rho L$ la masa de la partícula de agua por unidad de sección y $acel$ la aceleración del movimiento de parada, que pasa de velocidad $v = v$ a $v = 0$ en un tiempo Δt, dada por:

$$acel = \frac{v}{\Delta t} = \frac{v^2}{\Delta L} \tag{10.7}$$

Sustituyendo en la ecuación (10.6) se tiene:

$$\varepsilon \frac{\Delta L}{L} = \rho L \frac{v^2}{\Delta L} \quad \rightarrow \quad v^2 = \frac{\varepsilon}{\rho} \left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2 \tag{10.8}$$

Sustituyendo la velocidad por la velocidad de propagación de la onda de choque hacia aguas arriba

$$v = a \frac{\Delta L}{L} \quad \rightarrow \quad a = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}} \tag{10.9}$$

Nótese que esta expresión coincide con la velocidad de sonido en el medio, que en el agua es de casi 1400 m/s. De no haberse considerado la simplificación de la ecuación (10.5) se tendría:

$$a = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}\left(1 - \frac{\Delta L}{L}\right) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}\left(1 - \frac{\Delta P}{\varepsilon}\right) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}\left(1 - \frac{\Delta \rho}{\rho}\right) \tag{10.10}$$

Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1

La altura de 760 mm equivale a una presión de:

$$P_1 = \gamma_{Hg}\, h_{Hg} = \rho_{Hg}\, g\, h_{Hg} = 13600 \cdot 9.81 \cdot 0.760 = 101396.16\, Pa$$

Cuando se considera el valor de la presión de cavitación se esta disminuyendo el valor de la presión atmosférica medida en el barómetro en ese valor, por ser esta la presión que se obtendrá en el extremo alto del barómetro.

$$P_2 = \gamma_{Hg}\, h_{Hg} + P_{v_{Hg}} = 101396.16 + 0.17 = 101396.33\, Pa$$

El error absoluto cometido en la primera medida es igual a $\varepsilon = P_{v_{Hg}} = 0.17\, Pa$, mientras que el error relativo se puede calcular como:

$$\varepsilon_r = \frac{|P_2 - P_1|}{\frac{P_1+P_2}{2}} = \frac{0.17}{\frac{101396.16+101396.33}{2}} = 1.6766 \cdot 10^{-6}$$

lo que puede considerarse claramente despreciable.

Utilizando la Ley de Jurin deducida en la ecuación (1.26) y sustituyendo los valores del problema se obtiene:

$$h = \frac{2\sigma_{Hg}\cos\theta}{\gamma_{Hg} R} = \frac{2 \cdot 0.375 \cos 140}{13600 \cdot 9.81 \frac{0.003}{2}} = -0.0029\, m$$

El error absoluto se corresponde con la presión equivalente a ese descenso capilar:

$$\varepsilon_2 = h\gamma_{Hg} = -0.029 \cdot 13600 \cdot 9.81 = -383.0222\, Pa$$
$$P_3 = P_2 - \varepsilon_2 = 101396.33 - 383.022 = 101013.3078\, Pa$$

En este caso el error relativo equivale a:

$$\varepsilon_r = \frac{|P_2 - P_3|}{\frac{P_2+P_3}{2}} = \frac{383.0222}{\frac{101396.33+101013.3078}{2}} = 3.7846 \cdot 10^{-3}$$

error claramente mayor que el anterior.



Ejercicio 2

TIViA0.4 La fuerza total (F_T) es la suma de la fuerza ejercida sobre ambas superficies ($F_1 + F_2$). Si ambas están a igual distancia de los bordes serán iguales ($F_1 = F_2 = \frac{F_T}{2}$)

Utilizando la ecuación (1.28) se tiene:

$$\tau = \mu\frac{v}{y} = \frac{F}{A} \qquad \rightarrow \qquad \mu = \frac{F_T}{2A}\frac{y}{v} = \frac{0.7}{2\cdot 0.4}\frac{\frac{2.0}{2}}{0.7} = 0.04375\, N\cdot s/m^2$$

La viscosidad cinemática se relaciona con la dinámica mediante la ecuación (1.29)

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{0.04375}{0.8\cdot 1000} = 0.0546875\cdot 10^{-3}\, m^2/s$$

Cuando estamos a $y_1 = 13\ mm$ y $y_2 = 7\ mm$ de cada una de las caras. la fuerza será:

$$F_t = F_1 + F_2 = \mu A v\left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2}\right) = 0.04375\cdot 0.4\cdot 0.2\left(\frac{1}{0.007} + \frac{1}{0.013}\right) = 0.7692\, N$$

Ejercicio 3

El área de la compuerta es:

$$A = (3.2 - 1.2)\, 2.0 = 4\, m^2$$

La profundidad del centro de gravedad de la compuerta:

$$d_{cdg} = \frac{3.2 + 1.2}{2} = 2.2\, m$$

Utilizando las fórmulas dadas en la teoría, el empuje puede determinarse como:

$$F_H = \gamma d_{cdg} A = 9810 \cdot 2.2 \cdot 2.2 = 86328\, N$$

La profundidad al punto de aplicación del empuje se calcula mediante:

$$d_e = d_{cdg} + \frac{I_{cdg}}{d_{cdg} A} = 2.2 + \frac{\frac{1}{12} 2.0\, (3.2 - 1.2)^3}{2.2 \cdot 4} = 2.3515\, m$$

Ejercicio 4

La compuerta se abre cuando el momento en el eje de giro de la compuerta de la fuerza actuante sobre la compuerta y la ejercida por el cable se igualan:

$$E_h d = F_h h \tag{10.11}$$

siendo:

E_h	Empuje horizontal sobre la compuerta	(N)
d	Distancia al punto de aplicación del empuje desde el eje de giro	(m)
F_h	Componente horizontal de la fuerza ejercida por el cable	(N)
h	Brazo de la compuerta	(m)

Para la determinación del empuje horizontal de la compuerta se consideran las presiones a ambos lados de la misma, resultando la diferencia entre ambos

$$E_h = \pi \frac{D^2}{4} \gamma \left(z_{max} - z_B\right) = 3467.14\, N \tag{10.12}$$

El brazo de este empuje resulta:

$$d = \frac{D}{2} = 0.150\, m \tag{10.13}$$

La fuerza se obtiene del equilibrio de fuerzas verticales en la boya cilíndrica

$$F = \pi \frac{D_b^2}{4} \gamma \left(z_{max} - z_1\right) \tag{10.14}$$

La componente horizontal de esta fuerza es:

$$F_h = \frac{\sqrt{2}}{2} F \tag{10.15}$$

Sustituyendo las ecuaciones (10.12), (10.13), (10.14) y (10.15) en (10.11), y despejando D_b, se tiene:

$$D_b = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{D^3}{h} \frac{z_{max} - z_B}{z_{max} - z_1}} \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{0.3^3}{0.6} \frac{8-3}{8-5}} = 0.2303\, m \tag{10.16}$$

La compuerta comienza a cerrarse cuando el momento del peso de la compuerta (P) respecto del eje de giro de la misma igual al momento de la fuerza (F_2) que se realiza en el cable. Planteando el equilibrio de momentos:

$$P \frac{D}{2} = F_2 h \tag{10.17}$$

Como la compuerta se ha abierto, la boya habrá subido una distancia:

$$L_b = \sqrt{2} h = \sqrt{2} \cdot 0.6 = 0.84853\, m \tag{10.18}$$

con lo que la fuerza realizada por el cable es:

$$F_2 = \pi \frac{D_b^2}{4} \gamma \left(z_2 - z_1 - L_b \right) = \pi \frac{0.2303^2}{4} 1000 \cdot 9.81 \left(6 - 5 - 0.84853 \right) = 61.89\, N \tag{10.19}$$

Por tanto el peso de la compuerta será:

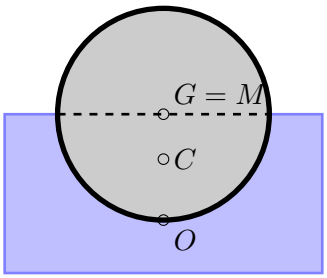
$$P = \frac{\pi}{2} \frac{D_b^2}{D} \gamma h \left(z_2 - z_1 - L_b \right) = \frac{\pi}{2} \frac{0.2303^2}{0.3} 1000 \cdot 9.81 \left(6 - 5 - 0.84853 \right) = 247.56948\, N \tag{10.20}$$

Si se aumenta el nivel en el depósito B, se incrementan las presiones en el lado aguas abajo de la compuerta haciendo que el empuje total resultante sobre la misma disminuya, por lo que se requerirá menor fuerza para abrirla. Esto implica que el nivel en A no se elevará tanto.

◀

Ejercicio 5

0.61.0 El aspecto más destacable es que en el cilindro flotando tumbado, la posición de equilibrio es indiferente respecto del eje horizontal que pasa por el centro del cilindro. Ello implica que el centro de gravedad de la sección ($\overline{OG}$) coincide con el centro de curvatura de los centros de carena o metacentro, es decir:



$$\overline{OG} = \overline{OM} = r \tag{10.21}$$

Lo mismo ocurre con una esfera, pero en ese caso para todas las direcciones de vuelco.

Por tanto la posición del centro de carena $\overline{OC} = \overline{OM} - \overline{CM}$ puede determinarse teniendo en cuenta el segundo teorema de Euler:

$$\overline{MC} = \frac{I_{GG'}}{V_c} \tag{10.22}$$

La inercia del plano de flotación respecto del eje GG' que pasa por el centro del cilindro es:

$$I_{GG'} = \frac{1}{12} h (2r)^3 \tag{10.23}$$

El volumen de carena es la mitad del volumen del cilindro

$$V_c = \frac{1}{2} \pi \cdot r^2 \cdot h \tag{10.24}$$

Con lo que resulta:

$$\overline{MC} = \frac{4r}{3\pi} \tag{10.25}$$

Finalmente la distancia del punto O al centro de carena será

$$\overline{OC} = r - \frac{4r}{3\pi} = r \left(1 - \frac{4}{3\pi} \right) \tag{10.26}$$

Aplicándolo a los datos del problema:

$$\overline{OC} = 2.0 \left(1 - \frac{4}{3\pi} \right) = 1.151 \tag{10.27}$$

◀